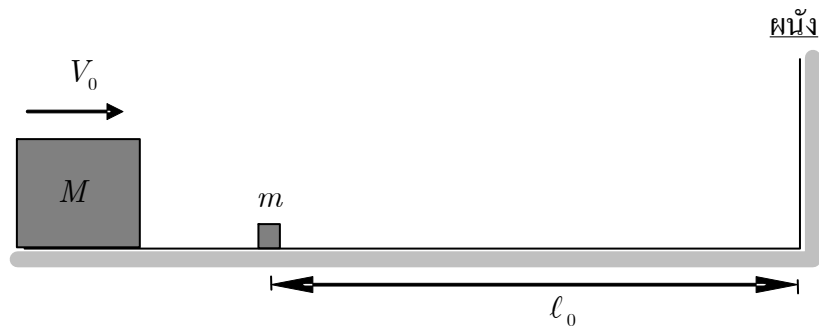


คำถามข้อสอบทฤษฎี

ข้อที่ 1



รูปที่ 1 มวล M ไกลบนพื้นลื่นด้วยอัตราเร็ว V_0 เข้าชนมวล m

ข้อที่ 1.1

จากกฎอนุรักษ์โมเมนตัม เราจะได้ว่า

$$MV_0 - mv_0 = MV_1 + mv_1 \quad (1.1)$$

เนื่องจาก $v_0 = 0$ จะได้

$$MV_0 = MV_1 + mv_1 \quad (1.2)$$

ดังนั้น

$$M(V_0 - V_1) = mv_1 \quad (1.3)$$

และจากกฎอนุรักษ์พลังงาน เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (1.4)$$

$$MV_0^2 = MV_1^2 + mv_1^2 \quad (1.5)$$

$$M(V_0^2 - V_1^2) = mv_1^2 \quad (1.6)$$

หารสมการที่ (1.6) ด้วยสมการที่ (1.3) จะได้

$$v_1 = V_0 + V_1 \quad (1.7)$$

แทนค่า v_1 ในสมการที่ (1.2) จะได้ว่า

$$MV_0 = MV_1 + m(V_0 + V_1) \quad (1.8)$$

จะได้

$$V_1 = \left(\frac{M - m}{M + m} \right) V_0$$

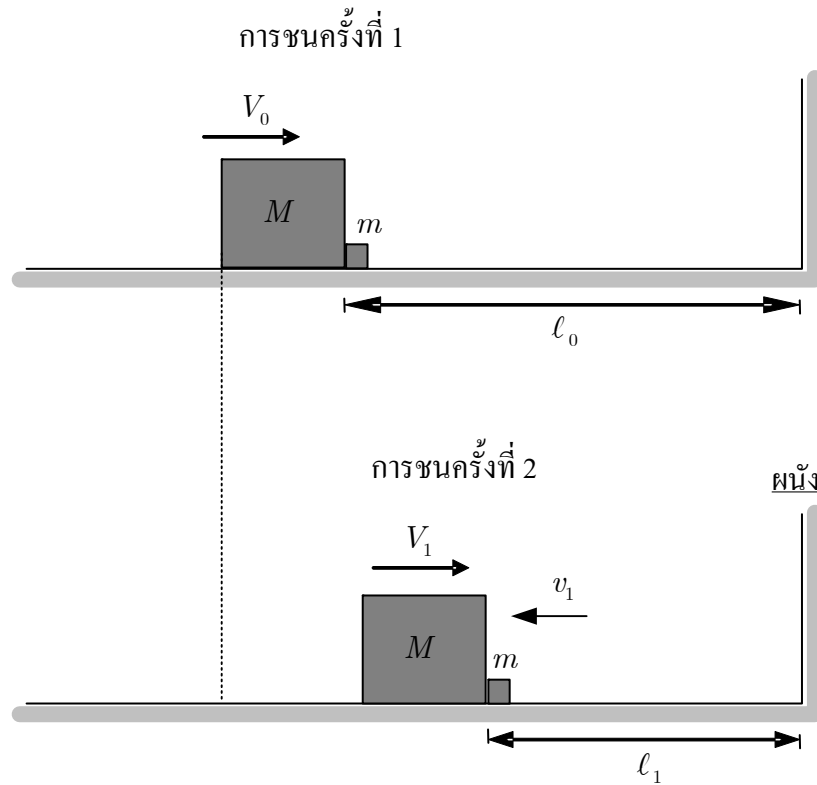
ตอบ

แทนค่า V_1 ในสมการที่ (1.7) จะได้

$$v_1 = \left(\frac{2M}{M+m} \right) V_0$$

ตอบ

ข้อที่ 1.2



รูปที่ 2 การชนครั้งที่ 1 (รูปบน) และครั้งที่ 2 (รูปล่าง)

เนื่องจาก t_1 คือ ระยะเวลาที่มวล M และ m ใช้ในการไถลเข้าหาผนังหลังจากการชนครั้งแรก ดังนั้น เราจะได้ว่า

- ระยะทางที่มวล M ไถลไปได้ คือ $V_1 t_1$
- ระยะทางที่มวล m ไถลไปได้ คือ $v_1 t_1$

และระยะทางที่มวล M และ m ไถลไปได้ เท่ากับระยะทาง $2\ell_0$ เพราะฉะนั้น

$$V_1 t_1 + v_1 t_1 = 2\ell_0 \quad (1.9)$$

$$t_1 = \frac{2\ell_0}{V_1 + v_1} \quad (1.10)$$

ตำแหน่งของการชนครั้งที่ 2 เป็น $\ell_1 = \ell_0 - V_1 t_1$ และโดยการแทนค่า t_1 จากสมการที่ (1.10) ลงไปใน ℓ_1 จะได้

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \ell_0 - V_1 t_1 \\ &= \ell_0 - V_1 \left(\frac{2\ell_0}{v_1 + V_1} \right) \\ &= \ell_0 \left(1 - \frac{2V_1}{v_1 + V_1} \right)\end{aligned}$$

หรือ

$$\ell_1 = \ell_0 \left(\frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1} \right) \quad \text{ตอบ}$$

หรืออาจแทนค่า $V_1 = \left(\frac{M - m}{M + m} \right) V_0$ และ $v_1 = \left(\frac{2M}{M + m} \right) V_0$ ลงในสมการข้างบน จะได้

$$\ell_1 = \ell_0 \left(\frac{M + m}{3M - m} \right) \quad \text{ตอบ}$$

ข้อที่ 1.3

จัดรูปสมการ $\ell_1 = \ell_0 \left(\frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1} \right)$ ใหม่ได้เป็น

$$\ell_1(v_1 + V_1) = \ell_0(v_1 - V_1) \quad (1.11)$$

ซึ่งขยายผลไปสู่การชนครั้งที่ n ได้เป็น (หรือเริ่มต้นทำใหม่)

$$\ell_{n+1}(v_{n+1} + V_{n+1}) = \ell_n(v_{n+1} - V_{n+1}) \quad (1.12)$$

จากกฎอนุรักษ์โมเมนตัมสำหรับการชนครั้งที่ n เราจะได้ว่า

$$MV_n - mv_n = MV_{n+1} + mv_{n+1} \quad (1.13)$$

$$M(V_n - V_{n+1}) = m(v_{n+1} + v_n) \quad (1.14)$$

และจากกฎอนุรักษ์พลังงาน สำหรับการชนครั้งที่ n เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{2}MV_n^2 + \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}MV_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 \quad (1.15)$$

$$MV_n^2 + mv_n^2 = MV_{n+1}^2 + mv_{n+1}^2 \quad (1.16)$$

$$M(V_n^2 - V_{n+1}^2) = m(v_{n+1}^2 - v_n^2) \quad (1.17)$$

หารสมการที่ (1.17) ด้วยสมการที่ (1.14) เราจะได้ว่า

$$V_n + V_{n+1} = v_{n+1} - v_n \quad (1.18)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (1.12) ได้ใหม่ว่า

$$\ell_{n+1}(v_{n+1} + V_{n+1}) = \ell_n(v_n + V_n) \quad (1.19)$$

$$\ell_{n+1} = \frac{(v_n + V_n)}{(v_{n+1} + V_{n+1})} \ell_n \quad (1.20)$$

หรือเราสามารถเขียนได้

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{(v_n + V_n)}{(v_{n+1} + V_{n+1})} \quad \text{ตอบ}$$

ข้อที่ 1.4

ให้ $\ell_{\min}$ เป็นระยะที่มวล M เข้าใกล้ผนังได้มากที่สุด (อัตราเร็วของมวล M เป็นศูนย์) ดังนั้นพลังงานจลน์เริ่มต้นทั้งหมดของมวล M เปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ของมวล m ที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v และจากกฎอนุรักษ์พลังงาน จะได้

$$v = V_0 \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (1.21)$$

สมการที่ (1.19) ทำให้เราทราบว่า

$$\ell_{n+1}(v_{n+1} + V_{n+1}) = \ell_n(v_n + V_n) = \ell_{n-1}(v_{n-1} + V_{n-1}) = \dots = \ell_0(v_0 + V_0)$$

นั่นคือ

$$\ell_n(v_n + V_n) = \ell_0 V_0 \quad (1.22)$$

และโดยการแทนค่า $\ell_n = \ell_{\min}$, $v_n = v = V_0 \sqrt{\frac{M}{m}}$ และ $V_n \approx 0$ จะได้

$$\ell_{\min} \left(V_0 \sqrt{\frac{M}{m}} + 0 \right) \approx \ell_0 V_0 \quad (1.23)$$

ดังนั้นระยะที่มวล M เข้าใกล้ผนังได้มากที่สุดคือ

$$\ell_{\min} \approx \ell_0 \sqrt{\frac{m}{M}} \quad \text{ตอบ}$$

ข้อที่ 2

ข้อที่ 2.1

กำหนดให้

- ทิศขึ้นเป็นบวก
- ความดันภายในลูกสูบในภาวะสมดุลเท่ากับ P_0
- แรงเนื่องจากความดันที่กระทำต่อลูกสูบใหญ่เท่ากับ $(P_0 - P_a)A$
- แรงเนื่องจากความดันที่กระทำต่อลูกสูบเล็กเท่ากับ $(P_a - P_0)a$

แรงลัพธ์ที่กระทำต่อลูกสูบในสภาวะสมดุลเป็นศูนย์

$$(P_0 - P_a)A + (P_a - P_0)a - Mg = 0 \quad (2.1)$$

หรือ

$$(P_0 - P_a)(A - a) - Mg = 0 \quad (2.2)$$

ดังนั้น

$$P_0 = P_a + \frac{Mg}{A - a} \quad (2.3)$$

ข้อที่ 2.2

เมื่ออุณหภูมิเพิ่มอย่างช้าๆ ลูกสูบจะเคลื่อนที่อย่างช้าๆแบบไม่มีความเร่ง ถือว่าอยู่ในภาวะสมดุลชั่วขณะตลอดเวลา ดังนั้น ความดันมีขนาดคงที่

เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น ΔT จะทำให้ปริมาตรเพิ่มขึ้น ΔV โดยที่

$$P_0 \Delta V = R \Delta T \quad (2.4)$$

แทนค่า P_0 จากสมการที่ (2.3) ลงในสมการที่ (2.4) จะได้ปริมาตรเพิ่มขึ้นเป็น

$$\Delta V = \frac{R \Delta T}{P_a + \frac{Mg}{A - a}} \quad (2.5)$$

เพื่อให้ปริมาตรเพิ่มขึ้น ลูกสูบจะต้องเคลื่อนที่ขึ้นเป็นระยะ $S = \frac{\Delta V}{A - a}$ ดังนั้น

$$S = \frac{R \Delta T}{P_a (A - a) + Mg} \quad (2.6)$$

ข้อที่ 2.3

เมื่อลูกสูบเลื่อนลงมาเป็นระยะทาง y ปริมาตรที่เปลี่ยนไป (ลดลง) มีขนาด

$$\Delta V = y(A - a) \quad (2.7)$$

ปริมาตรของแก๊สภายในลูกสูบเท่ากับ $V = V_0 - \Delta V$ หรือ

$$V = V_0 - y(A - a) \quad (2.8)$$

เนื่องจากภาชนะเป็นฉนวน กระบวนการทั้งหมดจึงเป็นแบบแอดิแบติก (Adiabatic) ความดันขณะนั้นจึงเท่ากับ

$$P = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma \quad (2.9)$$

โดยที่ $\gamma = \frac{5}{3}$ สำหรับแก๊สฮีเลียม

แทนค่า V จากสมการที่ (2.8) ลงในสมการที่ (2.9) จะได้

$$P = P_0 \left[\frac{V_0}{V_0 - y(A - a)} \right]^\gamma \quad (2.10)$$

หรือ

$$P = P_0 \frac{1}{\left[1 - \frac{y(A - a)}{V_0} \right]^\gamma} \quad (2.11)$$

ในกรณีที่ y มีค่าน้อยๆ จะได้

$$P \approx P_0 \left[1 + \frac{\gamma y(A - a)}{V_0} \right] \quad (2.12)$$

แรงลัพธ์ที่กระทำต่อลูกสูบเป็น

$$F_{\text{net}} = (P - P_a)A + (P_a - P)a - Mg \quad (2.13)$$

หรือ

$$F_{\text{net}} = (P - P_a)(A - a) - Mg \quad (2.14)$$

แทนค่า P จากสมการที่ (2.12) และใช้สมการที่ (2.2) แล้วจัดรูปใหม่จะเห็นว่า แรงลัพธ์ที่กระทำต่อลูกสูบเท่ากับ

$$F_{\text{net}} = \frac{P_0 \gamma (A - a)^2}{V_0} y$$

ตอบ

ข้อที่ 2.4

ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน $F_{\text{net}} = -M \frac{d^2 y}{dt^2} = -M\ddot{y}$ จะได้ว่า

$$\ddot{y} + \frac{P_0 \gamma (A - a)^2}{MV_0} y = 0 \quad (2.15)$$

ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายที่มีความถี่เชิงมุมเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{P_0 \gamma (A - a)^2}{MV_0}} \quad (2.16)$$

และมีคาบเป็น

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{MV_0}{P_0 \gamma (A - a)^2}} \quad (2.17)$$

แทนค่า $\gamma = \frac{5}{3}$ (สำหรับแก๊สฮีเลียม) ลงในสมการที่ (2.17) จะได้ว่า

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MV_0}{5P_0 (A - a)^2}} \quad (2.18)$$

และแทนค่า P_0 จากสมการที่ (2.3) ลงในสมการที่ (2.18) จะได้

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MV_0}{5 \left(P_a + \frac{Mg}{A - a} \right) (A - a)^2}} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

(ต้องแทนค่าทั้ง γ และ P_0 เพราะให้ตอบในรูปที่โจทย์กำหนดให้)

ข้อที่ 3.

ข้อที่ 3.1

ตำแหน่งที่ 4

ศักย์ไฟฟ้าที่จุด a เป็น $-V_0$ ไดโอดตัวล่างอยู่ในสถานะ Forward bias ทำให้ $V_b = 0$
 ขณะที่ไดโอดตัวบนยังคงอยู่ในสถานะ Reverse bias ทำให้ประจุ Q และศักย์ V_d ยังคงเท่าเดิม

ตำแหน่ง	V_a (V)	V_b (V)	D_1 (เปิด/ปิด)	V_d (V)	D_2 (เปิด/ปิด)	q (C)	Q (C)
4	$-V_0$	0	ปิด	$\frac{1}{2}V_0$	เปิด	CV_0	$\frac{1}{2}CV_0$

ตำแหน่งที่ 5

ศักย์ไฟฟ้าที่จุด a เป็นศูนย์ แต่ไดโอดตัวบนอยู่ในสถานะ Forward bias ทำให้ประจุบวก q ที่สะสมอยู่ไม่สามารถไปไหนได้ จึงทำให้ $V_b = V_0$ ขณะที่ประจุที่สะสมบนตัวเก็บประจุทั้งคู่ ยังคงเท่าเดิม

ตำแหน่ง	V_a (V)	V_b (V)	D_1 (เปิด/ปิด)	V_d (V)	D_2 (เปิด/ปิด)	q (C)	Q (C)
5	0	$\frac{3}{4}V_0$	เปิด	$\frac{3}{4}V_0$	ปิด	$\frac{3}{4}CV_0$	$\frac{3}{4}CV_0$

ตำแหน่งที่ 6

ศักย์ไฟฟ้าที่จุด a เป็น V_0 ไดโอดตัวบนเปิดขณะที่ไดโอดตัวล่างปิด ทำให้เกิดการถ่ายเทประจุระหว่างตัวเก็บประจุทั้งสองไปตามทิศทางที่ถูกบังคับจากไดโอดตัวบน และเกิดการกระจายประจุใหม่หาได้จาก

$$\begin{aligned} q + Q &= CV_0 + CV_0 / 2 \\ &= \frac{3}{2}CV_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

และกฎข้อที่ 2 ของเคอชอฟต์ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{-q}{C} + \frac{Q}{C} &= V_0 \\ -q + Q &= CV_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

จะได้ว่าประจุ q และ Q มีค่า

$$\begin{aligned} Q &= \frac{5}{4}CV_0 \\ q &= \frac{1}{4}CV_0 \end{aligned}$$

ตอบ

ตำแหน่ง	V_a (V)	V_b (V)	D_1 (เปิด/ปิด)	V_d (V)	D_2 (เปิด/ปิด)	q (C)	Q (C)
6	V_0	$\frac{5}{4}V_0$	เปิด	$\frac{5}{4}V_0$	ปิด	$\frac{1}{4}CV_0$	$\frac{5}{4}CV_0$

ข้อที่ 3.2

ข้อที่ 3.2.1

ความต่างเส้นทางเดินแสงมีค่าเท่ากับ

$$\text{path difference} = d \sin \alpha + d \sin \beta \quad (3.3)$$

การแทรกสอดเสริมเกิดขึ้นเมื่อ

$$\text{path difference} = n\lambda \quad (3.4)$$

แทนค่าสมการที่ (3.3) ลงในสมการที่ (3.4) จะได้

$$d \sin \alpha + d \sin \beta = n\lambda \quad (3.5)$$

โดยที่ $n = 0, 1, 2, \dots$

และการแทรกสอดหักล้างเกิดขึ้นเมื่อ

$$\text{path difference} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (3.6)$$

แทนค่าสมการที่ (3.3) ลงในสมการที่ (3.6) จะได้

$$d \sin \alpha + d \sin \beta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (3.7)$$

แนวสว่างอันดับที่ศูนย์เกิดขึ้นที่มุม β_{0A} หาได้จาก

$$d \sin \alpha + d \sin \beta_{0A} = 0\lambda \quad (3.8)$$

แนวสว่างอันดับที่ศูนย์เกิดขึ้นที่มุม β_{0A} เป็น

$$\beta_{0A} = -\alpha$$

ตอบ

ข้อที่ 3.2.2

ทำนองเดียวกันจะได้ความต่างเส้นทางเดินแสงมีค่าเท่ากับ

$$\text{path difference} = d \sin(-\alpha) + d \sin \beta \quad (3.9)$$

การแทรกสอดเสริมเกิดขึ้นเมื่อ

$$\text{path difference} = d \sin(-\alpha) + d \sin \beta \quad (3.10)$$

แทนค่า $\text{path difference} = n\lambda$ ลงในสมการที่ (3.10) จะได้

$$\begin{aligned} d \sin(-\alpha) + d \sin \beta &= n\lambda \\ -d \sin \alpha + d \sin \beta &= n\lambda \end{aligned} \quad (3.11)$$

และการแทรกสอดหักล้างเกิดขึ้น

$$\begin{aligned} d \sin(-\alpha) + d \sin \beta &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \\ -d \sin \alpha + d \sin \beta &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \end{aligned} \quad (3.12)$$

และการแทรกสอดเสริมอันดับศูนย์เกิดขึ้นที่มุม β_{0B} หาได้จาก

$$-d \sin \alpha + d \sin \beta_{0B} = 0\lambda \quad (3.13)$$

การแทรกสอดเสริมอันดับศูนย์เกิดขึ้นที่มุม β_{0B} มีค่าเท่ากับ

$$\beta_{0B} = \alpha$$

ตอบ

ข้อที่ 3.2.3

เมื่อแถบสว่างของริ้วจากดาว B ทับกับแถบมืดจากริ้วของดาว A จะทำให้ริ้วรอยการแทรกสอดคลบเลื่อนไป ดังนั้นจะได้เงื่อนไขของการหายไป

แถบมืด อันดับที่ n ของริ้วจากดาว A คือ

$$d \sin \alpha + d \sin \beta = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (3.14)$$

ซึ่งเกิดขึ้นทับกับแถบสว่างจากดาว B ที่มีมุม β_{0B} เมื่อระยะ $d = d_0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} d_0 \sin \alpha + d_0 \sin \beta_{0B} &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \\ d_0 \sin \alpha + d_0 \sin \alpha &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \end{aligned} \quad (3.15)$$

สุดท้ายจะได้ว่า

$$2d_0 \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (3.16)$$

ทำนองเดียวกัน แถบมืดของริ้วจากดาว A อันดับถัดไปที่ $n+1$ เกิดขึ้นทับกับแถบสว่างจากดาว B ที่มีมุม β_{0B} เมื่อระยะ $d = d_1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} d_1 \sin \alpha + d_1 \sin \beta_{0B} &= \left(n + \frac{3}{2} \right) \lambda \\ d_1 \sin \alpha + d_1 \sin \alpha &= \left(n + \frac{3}{2} \right) \lambda \end{aligned} \quad (3.17)$$

สุดท้ายจะได้ว่า

$$2d_1 \sin \alpha = \left(n + \frac{3}{2} \right) \lambda \quad (3.18)$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} 2d_1 \sin \alpha - 2d_0 \sin \alpha &= \lambda \\ 2(d_1 - d_0) \sin \alpha &= \lambda \end{aligned} \quad (3.19)$$

คือ

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2(d_1 - d_0)} \quad (3.20)$$

ถ้ามุม α มีค่าน้อย ๆ จะประมาณได้ว่า $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\lambda}{2(d_1 - d_0)}$ จะได้ว่า

$$2\alpha = \frac{\lambda}{(d_1 - d_0)}$$

ตอบ