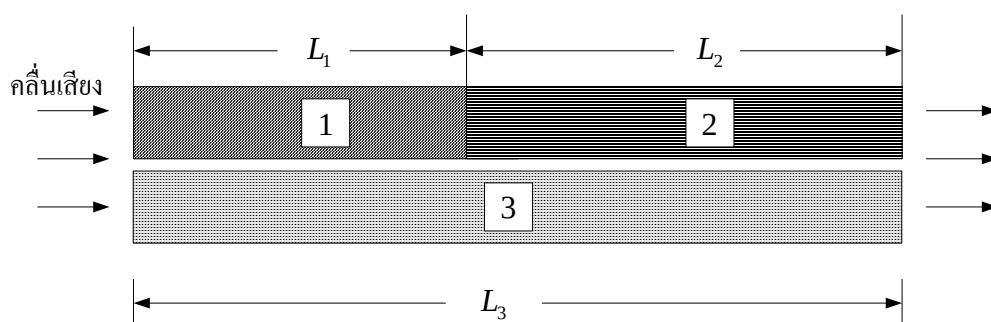


Equation Chapter 1 Section 1 คำเฉลยและแนวการตรวจให้คะแนน (Marking Scheme)

ข้อสอบทฤษฎี

ข้อที่ 1

ข้อที่ 1.1



รูปที่ 1.1 แสดงการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียงผ่านแท่งโลหะ

ข้อที่ 1.1.1

เนื่องจาก $t = \frac{L}{v}$

และ $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ และ $t_1 + t_2 = t_3$ จะได้

$$L_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{Y_1}} + L_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{Y_2}} = L_3 \sqrt{\frac{\rho_3}{Y_3}} \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 1.1.1$$

อาศัยความสัมพันธ์ $\rho_1 = 3\rho_3$, $\rho_2 = \frac{\rho_3}{2}$ และ $Y_1 = Y_3/3$, $Y_2 = 2Y_3$ จึงเขียนได้ว่า

$$L_1 \sqrt{\frac{3\rho_3}{Y_3/3}} + L_2 \sqrt{\frac{\rho_3/2}{2Y_3}} = L_3 \sqrt{\frac{\rho_3}{Y_3}} \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.1.2$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$3L_1 \sqrt{\frac{\rho_3}{Y_3}} + \frac{L_2}{2} \sqrt{\frac{\rho_3}{Y_3}} = L_3 \sqrt{\frac{\rho_3}{Y_3}} \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.1.3$$

เอา $\sqrt{\frac{\rho_3}{Y_3}}$ หารตลอดจะได้

$$3L_1 + \frac{L_2}{2} = L_3 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.1.4$$

เนื่องจาก

$$L_1 + L_2 = L_3$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4}$$

[0.3 คะแนน] **ตอบ**

ข้อที่ 1.1.2

ความต่างเฟสของคลื่นเสียงที่ผ่านแท่งโลหะชนิดที่ 1 และ 2 เทียบกับคลื่นเสียงที่ผ่านแท่งโลหะชนิดที่ 3 มีค่าเป็นเท่าใด

ความถี่เชิงมุมหาได้ $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = 2\pi f$ 1.1.5

ในโลหะชนิดที่ 1 จะได้ $\Delta\phi_1 = 2\pi ft_1$ [0.4 คะแนน] 1.1.6

ในโลหะชนิดที่ 2 จะได้ $\Delta\phi_2 = 2\pi ft_2$ 1.1.7

$$\Delta\phi_{12} = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = 2\pi f(t_1 + t_2) = 2\pi ft_3$$
 1.1.8

$$\Delta\phi_3 = 2\pi ft_3$$
 1.1.9

ดังนั้น

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{12} - \Delta\phi_3 = 0$$
 [0.4 คะแนน] **ตอบ**

หมายเหตุ ถ้านักเรียนตอบโดยให้เหตุผลว่า เวลาที่ใช้เท่ากันและความถี่เท่ากัน จึงไม่มีความต่างเฟส ก็จะได้คะแนน {0.8 คะแนน}

*** ถ้านักเรียนตอบศูนย์โดยไม่ให้เหตุผลใดๆ จะไม่ได้คะแนน**

ข้อที่ 1.2

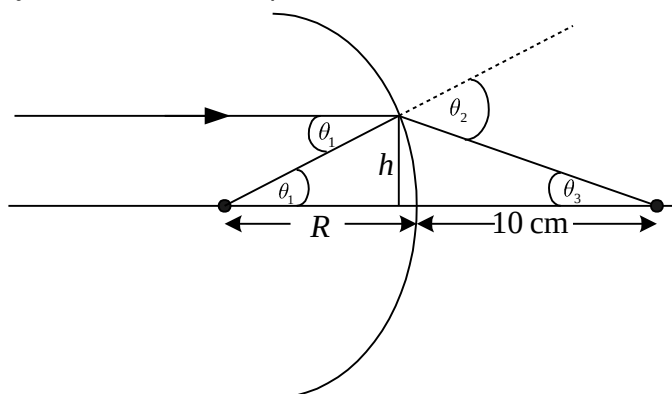
ค่า R [1.6 คะแนน]

ค่า L [1.0 คะแนน]

ค่า x [0.9 คะแนน]

เฉลย วิธีที่ 1 ใช้วิธี Geometrical Optics

หารัศมีความโค้ง ดังรูปที่ 1.2.1 โดยอาศัยกฎของสเนลล์



รูปที่ 1.2.1 [0.3 คะแนน]

รู้ว่าผ่านผิวแรกโดยไม่หักเห

[0.2 คะแนน]

จาก

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.1$$

เมื่อ $n_1 = n$ เป็นค่าดัชนีหักเหของแก้ว และ $n_2 = 1$ เป็นค่าดัชนีหักเหของอากาศ เนื่องจากเราพิจารณา มุมตกกระทบและมุมหักเหเป็นมุมน้อย ดังนั้น $\sin \theta \approx \theta$ จะได้ว่า

[0.1 คะแนน]

$$n\theta_1 = \theta_2 \quad 1.2.2$$

โดยที่

$$\theta_1 + \theta_3 = \theta_2 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.3$$

แทนค่า θ_2 ลงในสมการที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \theta_3 &= n\theta_1 - \theta_1 \\ &= (n-1)\theta_1 \end{aligned} \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.4$$

จากรูปที่ 1.2.1 เราจะได้ว่า

$$\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{h}{R} \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.5$$

และ

$$\sin \theta_3 \approx \tan \theta_3 = \frac{h}{10 \text{ cm}} \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.6$$

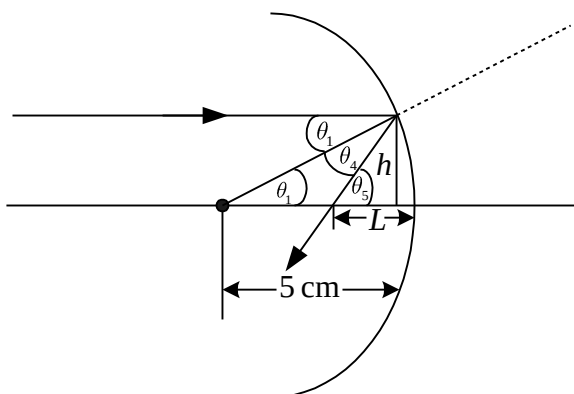
ใช้ค่าในสมการที่ 1.2.5 และ 1.2.6 แทนในสมการที่ 1.2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{h}{10 \text{ cm}} &= (n-1) \frac{h}{R} \\ \frac{1}{10 \text{ cm}} &= (n-1) \frac{1}{R} \end{aligned} \quad 1.2.7$$

เมื่อ $n=1.5$ จะได้ว่า

$$R = 5 \text{ cm} \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.8$$

คิดการสะท้อนกรณีเป็นเนื้อแก้วเต็ม



รูปที่ 1.2.2 [0.3 คะแนน]

หาระยะ L จากรูปที่ 1.2.2 จะได้ว่า

$$\theta_1 = \theta_4 \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.9$$

และ

$$\theta_5 = \theta_1 + \theta_4 = 2\theta_1 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.10$$

จากรูปที่ 1.2.3 เราจะได้ว่า

$$\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{h}{5 \text{ cm}} \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.11$$

และ

$$\sin \theta_5 \approx \tan \theta_5 = \frac{h}{L} \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.12$$

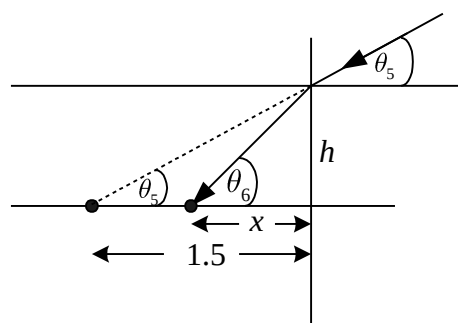
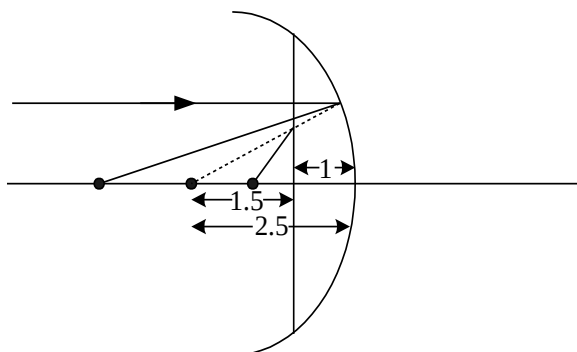
ใช้ค่าในสมการที่ 1.2.11 และ 1.2.12 แทนในสมการที่ 1.2.10 จะได้ว่า

$$\frac{h}{L} = 2 \frac{h}{5 \text{ cm}}$$

$$L = 2.5 \text{ cm} \quad \text{จากด้านหลังผิวโค้ง} \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.13$$

{หน่วย} [0.1 คะแนน]

การหักเหที่ผิวระนาบ



รูปที่ 1.2.3 [0.3 คะแนน]

จาก รูปที่ 1.2.3 และกฎของสเนลล์ (Snell 's law)

$$n_1 \sin \theta_5 = n_2 \sin \theta_6 \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \text{ 1.2.14}$$

เมื่อ $n_2 = 1$ และ ส่วนย่อยของรังสี $\sin \theta \approx \theta$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$n\theta_5 = \theta_6 \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \text{ 1.2.15}$$

และ

$$n \frac{h}{1.5 \text{ cm}} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{1.5 \text{ cm}}{1.5} = 1.0 \text{ cm} \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \text{ 1.2.16}$$

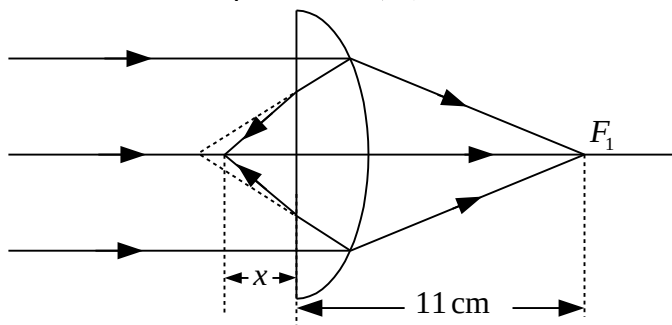
{หน่วย} [0.1 คะแนน]

เราจะได้ว่าระยะที่ลำแสงที่ถูกโฟกัสห่างจากผิวราบมีค่าเท่ากับ 1 cm

ตอบ

เฉลย วิธีที่ 2 (ถ้าใช้วิธีข้างทำเลนส์ให้เต็ม 1.0 คะแนน)

* หากใช้การหักเหที่ผิวเดียวจากสมการ $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R}\right)$ ได้ 1.6 คะแนนเต็ม



รูปที่ 1.2.4 (ก)

คำนวณหารัศมีความโค้งของเลนส์ โดยการเกิดการหักเหที่ผิวเดียว

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R}\right) \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \text{ 1.2.17}$$

ในกรณีนี้เลนส์ที่ใช้เป็นเลนส์แกมมะนาบ ดังนั้น ดัชนีหักเห $n=1.5$, หาค่า R

[0.2 คะแนน]

และมีความยาวโฟกัส $f = 10 \text{ cm}$

[0.5 คะแนน]

$$-\frac{1}{R_2} = \frac{1}{f(n-1)}$$

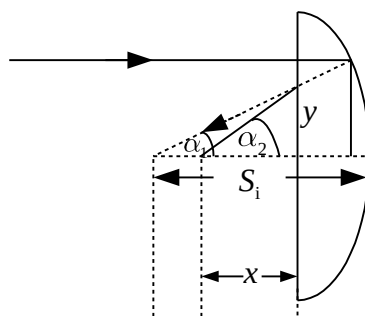
$$R_2 = -f(n-1)$$

$$= -(10 \text{ cm})(1.5-1)$$

$$= -5.0 \text{ cm}$$

[0.3 คะแนน] 1.2.18

พิจารณากระจก



รูปที่ 1.2.4 (ข) [0.3 คะแนน]

$$\frac{1}{S_i} + \frac{1}{S_o} = -\frac{2}{R}$$

[0.2 คะแนน] 1.2.19

ในกรณีนี้ ถ้าแสงเลเซอร์เป็นลำแสงขนาน ดังนั้น ระยะวัตถุ $S_o = \infty$, รัศมีความโค้ง

$R = -5.0 \text{ cm}$, หาค่าระยะภาพ $S_i = ?$

[0.2 คะแนน]

จะได้ว่า

$$\frac{1}{S_i} = -\frac{2}{R} - \frac{1}{S_o}$$

$$S_i = -\frac{R}{2}$$

$$= \frac{5.0 \text{ cm}}{2} = 2.5 \text{ cm}$$

[0.3 คะแนน] 1.2.20

{ถ้าไม่มีหน่วยหัก} [0.1 คะแนน]

* หากใช้สมการนี้แต่ใช้ R ที่ผิด ให้คะแนนสมการที่ 1.2.19 + คะแนนหน่วย

อย่างไรก็ตามภาพที่เกิดขึ้นนี้เป็นภาพเสมือนจริง เสมือนว่ารังสีจะถูกสะท้อนออกจากเลนส์ ดังรูปที่ 1.2.4 (ข) เราต้องหาระยะที่รังสีจริงและรังสีเสมือนจริง ไปตกยังหน้าเลนส์

จาก กฎของสเนลล์ (Snell's law)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

[0.1 คะแนน] 1.2.21

เมื่อ $n_2 = 1$ และ ส่วนย่อยของรังสี $\sin \alpha \approx \alpha$ ดังนั้นจะได้ว่า

[0.1 คะแนน]

$$n_1 \alpha_1 = \alpha_2$$

[0.1 คะแนน] 1.2.22

และ

$$\alpha_1 = \frac{y}{(S_1 - 1)}, \quad \alpha_2 = \frac{y}{x} \quad 1.2.23$$

จะได้ว่า

$$\frac{n_1 y}{(S_1 - 1)} = \frac{y}{x} \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.24$$

ดังนั้น

$$x = \frac{(S_1 - 1)}{n} = \frac{(2.5 - 1.0) \text{ cm}}{1.5} = 1.0 \text{ cm} \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 1.2.25$$

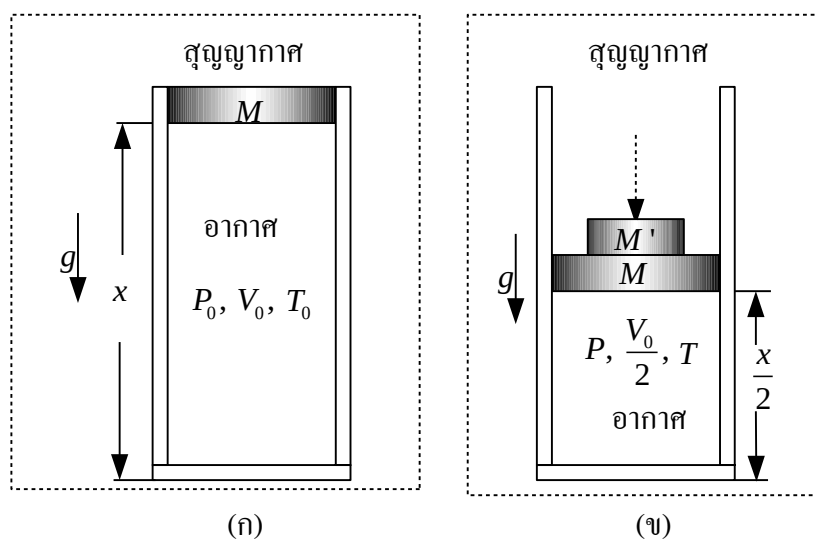
{ถ้าไม่มีหน่วยหัก} [0.1 คะแนน]

เราจะได้ว่าระยะที่ลำแสงที่ถูกโฟกัสจากผิวราบมีค่าเท่ากับ 1.0 cm

ตอบ

* หัก 0.2 คะแนน ถ้าเลขนัยสำคัญไม่ถูกต้องที่คำตอบสุดท้าย

ข้อที่ 1.3



รูปที่ 1.3

จากรูปที่ 1.3(ก) โมลของแก๊สในกระบอกสูบ

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.1$$

ถ้าลูกสูบมีพื้นที่หน้าตัด A ในสภาวะสมดุลตอนแรก

$$\frac{Mg}{A} = P_0 \quad [0.6 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.2$$

ในรูปที่ 1.3(ก) และ 1.3 (ข) จากกฎของแก๊ส

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P V_0}{2T} \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.3$$

ในตอนหลัง ถ้ามวลทั้งสองเคลื่อนที่ลงเป็นระยะ h ลงสู่จุดต่ำสุด จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน

[0.2 คะแนน]

$$(M' + M)gh = \frac{5}{2} nR(T - T_0) \quad [1.0 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.4$$

* หากพยายามใช้สมการ $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ แต่ผิดบางตัว หัก 0.3 คะแนน ถ้าไม่รู้ $\Delta Q = 0$,
หัก 0.3 คะแนน ถ้าไม่รู้ $\Delta W = M + M' gh$

โดยใช้สมการที่ 1.3.1 และ 1.3.2 จะได้

$$(M' + M)gh = \frac{MgV_0}{ART_0} \frac{5R}{2} (T - T_0) \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.5$$

หรือ

$$\frac{M'}{M} + 1 = \frac{5}{2} \frac{V_0}{Ah} \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) \quad [0.1 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.6$$

และตามโจทย์ Ah เป็นปริมาตรแก๊สที่ลดลงซึ่งเท่ากับ $V_0/2$ นั่นคือ

$$\frac{M'}{M} + 1 = 5 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.7$$

เนื่องจากตามโจทย์แก๊สภายในกระบอกสูบหดตัวแบบอะเดียบาติก

$$P_0 V_0^\gamma = P \left(\frac{V_0}{2} \right)^\gamma \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.8$$

จาก สมการที่ 1.3.3 และ 1.3.8

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T \left(\frac{V_0}{2} \right)^{\gamma-1} \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.9$$

หรือ

$$\frac{T}{T_0} = 2^{\gamma-1} \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.10$$

จะได้ว่า

$$\frac{T}{T_0} = 2^{0.4} \quad 1.3.11$$

แทนใน สมการที่ 1.3.7

$$\begin{aligned} \frac{M'}{M} &= 5 \cdot 2^{0.4} - 1 - 1 \\ &= 0.6 \end{aligned} \quad [0.6 \text{ คะแนน}] \quad 1.3.12$$

ข้อที่ 2ข้อที่ 2.1วิธีที่ 1

สมมติให้อิเล็กตรอนอยู่จุดใดๆ บนแท่งตัวนำ ดังนั้นอิเล็กตรอนได้รับแรงกระทำ ($\vec{F}$) เขียนสมการได้ว่า

$$\vec{F} = -|e| \vec{v} \times \vec{B} \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.1$$

โดยที่ $-|e|$ คือประจุอิเล็กตรอน, $\vec{v}$ คือความเร็วเชิงเส้น

เราจะได้ว่าแรงในแนวนานกับแท่งตัวนำ $\vec{F}$ ที่กระทำกับอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับ

$$F = -|e| v B \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.2$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าจะถูกเหนี่ยวนำตลอดทั้งแท่งตัวนำ ($E = -F/|e|$) จะได้ว่า [0.2 คะแนน]

$$E = v B \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.3$$

จะได้ว่าความต่างศักย์ระหว่าง a กับ b มีค่าเท่ากับ

$$V_a - V_b = -\int_0^\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad [0.4 \text{ คะแนน}]$$

$$= v B \int_0^\ell d\ell = v B \ell \quad [0.6 \text{ คะแนน}] \quad \text{ตอบ}$$

*** หากคำตอบแสดงว่า V_a น้อยกว่า V_b หรือไม่แสดงการคิดทศ หัก 0.3 คะแนน**

วิธีที่ 2

จากกฎของฟาราเดย์

$$E_{\text{emf}} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.1$$

และจากฟลักซ์แม่เหล็ก $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$ [0.2 คะแนน]

เมื่อพื้นที่แท่งตัวนำเคลื่อนที่ไปได้ระยะเวลา dt มีค่าเป็น

$$dA = -\ell v dt \quad (\text{กรณีอิเล็กตรอน}) \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.2$$

จะได้ว่า

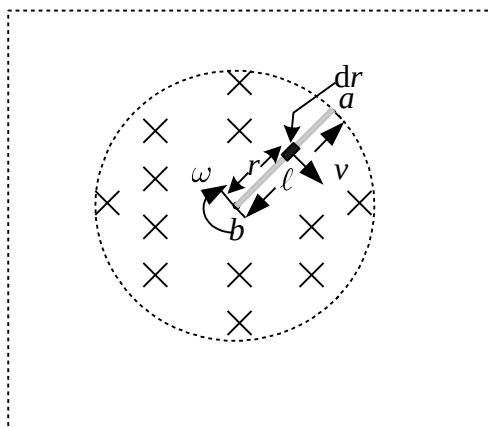
$$d\phi_B = B \ell v dt \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.3$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$E_{\text{emf}} = V_a - V_b = \frac{B \ell v dt}{dt} = B \ell v \quad [0.6 \text{ คะแนน}] \quad 2.1.4$$

*** หากคำตอบแสดงว่า V_a น้อยกว่า V_b หรือไม่แสดงการคิดทศ หัก 0.3 คะแนน**

ข้อที่ 2.2 พิจารณาส่ว่นเล็กๆ dr ของแท่งตัวนำเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาตัดผ่านสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 [0.3 คะแนน]

วิธีที่ 1

ดังนั้น emf ของส่วนเล็กๆ dE_{emf}

$$dE_{\text{emf}} = Bvdr \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.2.1$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงเส้นกับความเร็วเชิงมุม คือ $v = \omega r$ ดังนั้น [0.3 คะแนน]

$$dE_{\text{emf}} = B\omega r dr \quad 2.2.2$$

ดังนั้น เมื่อเราพิจารณา emf ทั้งแท่งตัวนำจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E_{\text{emf}} &= V_a - V_b = B\omega \int_0^l r dr \\ &= \frac{1}{2} B\omega l^2 \end{aligned} \quad [0.5 \text{ คะแนน}] \quad \text{ตอบ}$$

วิธีที่ 2 จากกฎของฟาราเดย์ - เลนซ์

$$E_{\text{emf}} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.2.3$$

และจากฟลักซ์แม่เหล็ก $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$ [0.2 คะแนน]

$$dA = \frac{1}{2} l^2 \omega dt \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.2.4$$

จะได้ว่า

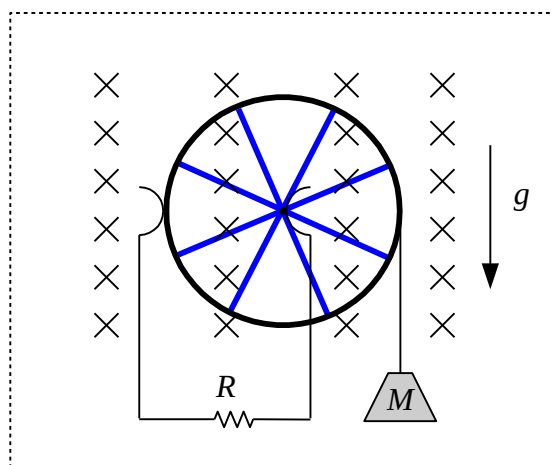
$$d\phi_B = -\frac{1}{2} B l^2 \omega dt \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 2.2.5$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$E_{\text{emf}} = V_a - V_b = \frac{B l^2 \omega / 2}{dt} = \frac{1}{2} B l^2 \omega \quad [0.6 \text{ คะแนน}] \quad 2.2.6$$

* หากคำตอบแสดงว่า $V_a < V_b$ หรือไม่แสดงการคิดทิส หัก 0.3 คะแนน

ข้อที่ 2.3



รูปที่ 2.3

ข้อที่ 2.3.1

สมมติให้อิเล็กตรอนอยู่ที่ระยะรัศมี r จากจุดหมุนของแต่ละเส้นลวดตัวนำ ดังรูปที่ 2.3 ดังนั้นอิเล็กตรอนได้รับแรงกระทำ ($\vec{F}$) เขียนสมการได้ว่า

$$\vec{F} = -|e| \vec{v} \times \vec{B} \quad 2.3.1$$

โดยที่ $-|e|$ คือประจุอิเล็กตรอน, $\vec{v}$ คือความเร็วเชิงเส้น และ $\vec{\omega}$ คือความเร็วเชิงมุม ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงเส้น $\vec{v}$ กับความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ คือ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ เราจะได้ว่าแรงในแนวรัศมี $\vec{F}_r$ ที่กระทำกับอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &= -|e| [\vec{\omega} \times \vec{r} \times \vec{B}] \\ &= -|e| B \omega \vec{r} \end{aligned} \quad 2.3.2$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าจะถูกเหนี่ยวนำตลอดทั้งเส้นลวดตัวนำ จะได้ว่า

$$\vec{E} = (B\omega) \vec{r} \quad 2.3.3$$

*** (หรือใช้ผลจากข้อที่ 2.2) โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ**

จะได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง C_2 กับ C_1 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} V &= -\int_0^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \omega B \int_0^{r_0} r dr = \frac{1}{2} \omega B r_0^2 \end{aligned} \quad [1 \text{ คะแนน}] \quad 2.3.4$$

ดังนั้นจะได้ว่า กระแสไฟฟ้า i ที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R มีค่าเท่ากับ

$$i = \frac{V}{R} = \frac{\omega B r_0^2}{2R} \quad [1 \text{ คะแนน}] \quad 2.3.5$$

ข้อที่ 2.3.2 วิธีที่ 1

พิจารณากำลังไฟฟ้า P ที่สูญเสียในตัวต้านทาน

$$P = i^2 R = \frac{\omega^2 B^2 r_0^4}{4R} = \frac{\dot{\phi}^2 B^2 r_0^4}{4R} \quad [0.5 \text{ คะแนน}] \quad 2.3.6$$

และ กำลังที่มวล M

$$P_M = Mgv \quad [0.5 \text{ คะแนน}]$$

$$= Mgr_0 \dot{\phi} \quad [0.5 \text{ คะแนน}] \quad 2.3.7$$

พลังงานจลน์ของเส้นลวดตัวนำ

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad 2.3.8$$

และ พลังจลน์ที่มวล M

$$E_{kM} = \frac{1}{2} M r_0^2 \dot{\phi}^2 \quad 2.3.9$$

โดยที่ I เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของเส้นลวดตัวนำ

จากกฎอนุรักษ์พลังงาน เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{I \dot{\phi}^2}{2} + \frac{1}{2} M r_0^2 \dot{\phi}^2 \right] + \frac{B^2 r_0^4}{4R} \dot{\phi}^2 = Mgr_0 \dot{\phi} \quad 2.3.10$$

มีความเข้าใจว่า $\frac{dE_k}{dt} = 0$

[0.5 คะแนน]

สำหรับความเร็วเชิงมุมคงที่ $\dot{\phi} = \omega_f$ เราจะได้ว่า

$$\frac{B^2 r_0^4}{4R} \omega_f^2 = Mgr_0 \omega_f \quad [1 \text{ คะแนน}] \quad 2.3.11$$

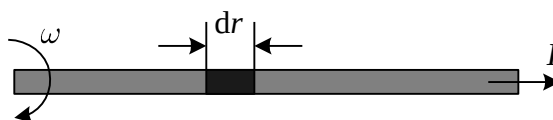
* หากสามารถหาสมการที่ 2.3.11 ได้ถือว่าได้คะแนนด้านบนเต็มแม้ไม่แสดงบางขั้นตอน

ดังนั้น

$$\omega_f = \frac{4MgR}{B^2 r_0^3} \quad [1 \text{ คะแนน}] \quad 2.3.12$$

วิธีที่ 2

คิดจากทอร์กในเส้นลวด พิจารณาลวดเส้นเดียว



รูปที่ 2.4 [0.5 คะแนน]

กระแส I ไหลจากแกนกลางไปตามเส้นลวด แรงเนื่องจากกระแสในเส้นลวดยาว dr คือ $IBdr$

[0.5 คะแนน]

ทอร์กในเส้นลวดยาว dr คือ $IBrdr$

[0.5 คะแนน]

ดังนั้น ทอร์กทั้งหมด คือ

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} IBrdr &= \frac{1}{2} Ir_0^2 B \\ &= \frac{\omega_f B^2 r_0^4}{4R}\end{aligned}$$

[1 คะแนน] 2.3.6

ซึ่งเท่ากับทอร์กจากมวล M แต่ทิศตรงข้าม

$$\frac{\omega_f B^2 r_0^4}{4R} = Mgr_0$$

[0.5 คะแนน] 2.3.7

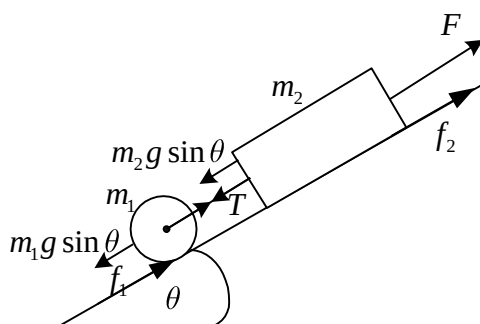
$$\omega_f = \frac{4MgR}{B^2 r_0^3}$$

[1 คะแนน] 2.3.8

หมายเหตุ การคิดลวดเส้นเดียวโดยมีกระแสไหลเท่ากับกระแสทั้งหมดจะทำให้ค่าทอร์กเท่ากับการแยกคิดแต่ละเส้นแล้วรวมกัน

ข้อที่ 3.

3.1 ถ้าดึงระบบด้วยแรง F น้อยที่สุดแล้วทำให้ระบบยังคงหยุดนิ่ง ทรงกระบอกลังเลไม่เคลื่อนที่ (กลิ้ง) ดังนั้น ทอร์ก τ รอบจุดหมุนมีค่าเท่ากับ 0 (ไม่หมุน) และ $f_1 = 0$ และ ที่มวล m_2 กำลังไถลลง กำหนดให้สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างมวล m_2 กับพื้นเอียง มีค่าเท่ากับ μ_s



รูปที่ 3.1 (เฉลย) [0.3 คะแนน]

เข้าใจว่า $f_1 = 0$

[0.3 คะแนน]

จากรูปที่ 3.1 และกฎของนิวตันข้อที่ 1 เราจะได้ว่า

$$m_1 : \quad 0 = T - m_1 g \sin \theta \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 3.1.1$$

$$m_2 : \quad 0 = F + f_2 - m_2 g \sin \theta - T \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 3.1.2$$

สมการที่ (3.1.1) + (3.1.2) จะได้ว่า

$$f_2 = m_1 + m_2 g \sin \theta - F \quad 3.1.3$$

แต่

$$f_2 \leq \mu_s m_2 g \cos \theta \quad 3.1.4$$

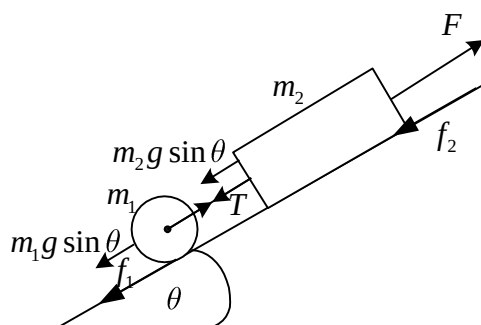
ดังนั้น

$$F \geq m_1 + m_2 g \sin \theta - \mu_s m_2 g \cos \theta \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 3.1.5$$

แรง F น้อยที่สุด ที่ดึงแล้วทำให้ระบบยังคงหยุดนิ่ง คือ

$$F = m_1 + m_2 g \sin \theta - \mu_s m_2 g \cos \theta \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad \text{ตอบ}$$

3.2 ถ้าดึงระบบด้วยแรง F มากที่สุดแล้วทำให้ระบบยังคงหยุดนิ่ง ทรงกระบอบกดันไม่เคลื่อนที่ (กลิ้ง) ดังนั้น ทอร์ก τ รอบจุดหมุนมีค่าเท่ากับ 0 (ไม่หมุน) และ $f_1 = 0$ และ ที่มวล m_2 กำลังเคลื่อนที่ขึ้น กำหนดให้สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างมวล m_2 กับพื้นเอียง มีค่าเท่ากับ μ_s



รูปที่ 3.2 (เฉลย) [0.3 คะแนน]

เข้าใจว่า $f_1 = 0$

[0.3 คะแนน]

จากรูปที่ 3.2 และกฎของนิวตันข้อที่ 1 เราจะได้ว่า

$$m_1: \quad 0 = T - m_1 g \sin \theta \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 3.2.1$$

$$m_2: \quad 0 = F - f_2 - m_2 g \sin \theta - T \quad [0.3 \text{ คะแนน}] \quad 3.2.2$$

สมการที่ (3.2.1) + (3.2.2) จะได้ว่า

$$f_2 = F - m_1 + m_2 g \sin \theta \quad 3.2.3$$

แต่

$$f_2 \leq \mu_s m_2 g \cos \theta \quad 3.2.4$$

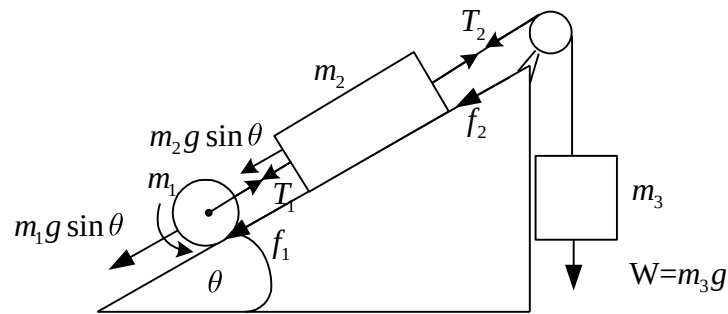
ดังนั้น

$$F \leq m_1 + m_2 g \sin \theta + \mu_s m_2 g \cos \theta \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 3.2.5$$

แรง F มากที่สุด ที่ดึงแล้วทำให้ระบบยังคงหยุดนิ่ง คือ

$$F = m_1 + m_2 g \sin \theta + \mu_s m_2 g \cos \theta \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \text{ ตอบ}$$

3.3



รูปที่ 3.3 [0.4 คะแนน]

จากรูปที่ 3.3 และกฎของนิวตันข้อที่ 2 เราจะได้ว่า

$$m_1: \quad m_1 a = T_1 - f_1 - m_1 g \sin \theta \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.1$$

$$m_2: \quad m_2 a = T_2 - f_2 - m_2 g \sin \theta - T_1 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.2$$

$$m_3: \quad m_3 a = W - T_2 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.3$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของทั้งระบบ (สมการที่ (3.3.1) + (3.3.2) + (3.3.3)) จะได้ว่า

$$m_1 + m_2 + m_3 \quad a = W - m_1 g \sin \theta - m_2 g \sin \theta - f_2 - f_1$$

$$m_1 + m_2 + m_3 \quad a = m_3 g - m_1 + m_2 \quad g \sin \theta - \mu_k m_2 g \cos \theta - f_1 \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.4$$

คำนวณหาแรงเสียดทาน f_1 ระหว่างผิวของทรงกระบอกตันกับพื้นเอียง โดยพิจารณาทอร์ก τ รอบแกนหมุนของทรงกระบอกตัน จาก

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.5$$

และ

$$\tau = I\alpha \quad [0.2 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.6$$

เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนของทรงกระบอกตัน

$$\alpha \text{ คือความเร่งเชิงมุม } (a = \alpha r) \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\tau = r f_1 = I \frac{a}{r} \quad 3.3.7$$

นั่นคือ

$$f_1 = \frac{Ia}{r^2} \quad [0.4 \text{ คะแนน}] \quad 3.3.8$$

แทนค่าแรงเสียดทาน f_1 ในสมการที่ (3.3.8) ลงในสมการที่ (3.3.4) จะได้ว่า

$$m_1 + m_2 + m_3 \quad a = m_3 g - m_1 + m_2 \quad g \sin \theta - \mu_k m_2 g \cos \theta - \frac{Ia}{r^2}$$

$$\left(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{I}{r^2} \right) a = m_3 g - m_1 + m_2 \quad g \sin \theta - \mu_k m_2 g \cos \theta$$

ดังนั้น ความเร่ง a ของระบบ เขียนใหม่ได้เป็น

$$a = \frac{g[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{\left(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{I}{r^2}\right)} \quad [0.8 \text{ คะแนน}]$$

หรือ

$$a = \frac{g[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)} - \quad \text{ตอบ}$$

3.4

เงื่อนไขที่ทรงกระบอกตันกลิ้งโดยไม่ไถล คือ

$$f_1 \leq \mu_s m_1 g \cos \theta \quad [2 \text{ คะแนน}] \quad 3.4.1$$

และเมื่อแทนความเร่ง a ของระบบ ลงในสมการที่ (3.3.8) จะได้ว่า

$$f_1 = \frac{I}{r^2} \frac{g[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)} \quad [0.5 \text{ คะแนน}] \quad 3.4.2$$

เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{I}{r^2} \frac{g[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)} &\leq \mu_s m_1 g \cos \theta \\ \frac{[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{2\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)} &\leq \mu_s \cos \theta \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\mu_s \geq \frac{[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{2 \cos \theta \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)} \quad [0.5 \text{ คะแนน}] \quad \text{ตอบ}$$

ข้อสังเกต (ไม่มีคะแนน)

เมื่อโจทย์กำหนดให้มีการเคลื่อนที่ขึ้นแสดงว่า μ_s จะมีค่าสูงสุดได้ค่าหนึ่งเท่านั้น จากคำตอบข้อที่ 3.2 แรงสูงสุดที่ว่าจะต้องน้อยกว่า $m_3 g$

$$F = m_1 + m_2 \ g \sin \theta + \mu_s m_2 g \cos \theta < m_3 g$$

จะได้ว่า

$$\mu_s < \frac{m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta}{m_2 \cos \theta}$$

ดังนั้นค่า μ_s ที่ทำให้การเคลื่อนที่ขึ้นไปได้ และทรงกระบอกไม่ไถล

$$\frac{[m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta - \mu_k m_2 \cos \theta]}{2 \cos \theta \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 + m_3 \right)} \leq \mu_s < \frac{m_3 - m_1 + m_2 \sin \theta}{m_2 \cos \theta}$$