

ข้อที่ 1.

[10 คะแนน]

a) พิจารณาเอนโทรปีของแต่ละกระบวนการ

$$\Delta S_{a \rightarrow b} = Q_H/T_H, \quad \Delta S_{b \rightarrow c} = 0, \quad \Delta S_{c \rightarrow d} = -Q_C/T_C, \quad \Delta S_{d \rightarrow a} = 0$$

จาก $\Delta S = \Delta S_{a \rightarrow b} + \Delta S_{b \rightarrow c} + \Delta S_{c \rightarrow d} + \Delta S_{d \rightarrow a} = 0$ จะได้ $Q_H/T_H - Q_C/T_C = 0$ หรือ $Q_C/Q_H = T_C/T_H$

งานที่ได้คือ $W = Q_H - Q_C$ เราสามารถหาประสิทธิภาพได้ดังนี้

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

b) กฎข้อที่ 1

$$\begin{aligned} Q_H &= \Delta U + W \\ &= 0 + \int_{V_a}^{V_b} p dV \\ &= RT_H \int_{V_a}^{V_b} \frac{1}{V} dV \\ &= RT_H \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) \end{aligned}$$

c) เมื่อใช้ $\eta = W/Q_H$ จะได้

$$W = \eta Q_H = \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right) RT_H \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = R(T_H - T_C) \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

d) กำหนดให้ $x_i = V_i/A$ ($i = a, b, c, d$) แสดงตำแหน่งของลูกสูบที่ปริมาตรต่าง ๆ เริ่มต้นจากจุด a ระยะเวลาทั้งหมดที่ลูกสูบเคลื่อนที่ 1 รอบคือ

$$\begin{aligned} s &= (x_b - x_a) + (x_c - x_b) + (x_c - x_d) + (x_d - x_a) \\ &= 2(x_c - x_a) \\ &= \frac{2}{A}(V_c - V_a) \end{aligned}$$

เมื่อใช้อัตราเร็วเฉลี่ย $\bar{v}$ เวลาที่ลูกสูบในการเคลื่อนที่ 1 รอบคือ

$$\tau = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{2}{A\bar{v}}(V_c - V_a)$$

e) เราสามารถเขียน V_c ในรูปของ V_b ได้โดยใช้ความสัมพันธ์แอดิเยแบติกในกระบวนการ $b \rightarrow c$:

$$\begin{aligned} T_H V_b^{\gamma-1} &= T_C V_c^{\gamma-1} \\ T_H V_b^{2/3} &= T_C V_c^{2/3} \\ V_c &= \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{3/2} V_b \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\tau = \frac{2}{A\bar{v}} \left[\left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} V_b - V_a \right] = \frac{2V_a}{A\bar{v}} \left[\left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{V_b}{V_a} - 1 \right]$$

กำลัง $P = W/\tau$:

$$P = \frac{R(T_H - T_C) \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right)}{\frac{2V_a}{A\bar{v}} \left[\left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{V_b}{V_a} - 1 \right]} = \frac{RT_H}{\frac{V_a}{p_a}} \cdot \frac{A\bar{v}}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right) \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right)}{\left[\left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{V_b}{V_a} - 1 \right]}$$

เมื่อเขียนในรูปของพารามิเตอร์ $\alpha = V_b/V_a > 1$ และ $\beta = T_H/T_C > 1$ จะได้

$$P = \frac{p_a A \bar{v}}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \ln \alpha}{\beta^{3/2} \alpha - 1}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูป

$$P = p_a A \bar{v} \cdot f(\alpha, \beta), \quad f(\alpha, \beta) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \ln \alpha}{2(\beta^{3/2} \alpha - 1)}$$

f) เมื่อ $\alpha \gg 1$ เราสามารถประมาณ $\beta^{3/2} \alpha - 1 \approx \beta^{3/2} \alpha$ ดังนั้น

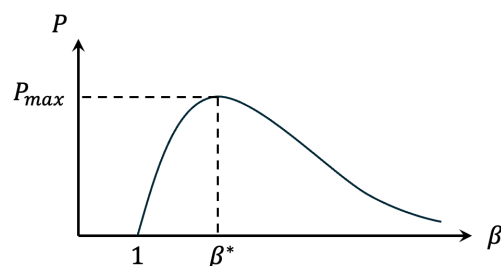
$$f = \frac{\left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \ln \alpha}{2\beta^{3/2} \alpha} = \frac{\ln \alpha}{2\alpha} \left(\frac{1}{\beta^{3/2}} - \frac{1}{\beta^{5/2}} \right)$$

จากนั้นใช้ $df/d\beta = 0$ เพื่อหา β ที่ทำให้ f สูงสุด :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\beta^{3/2}} - \frac{1}{\beta^{5/2}} \right) &= 0 \\ -\frac{3}{2\beta^{5/2}} + \frac{5}{2\beta^{7/2}} &= 0 \\ \beta &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

กำลังมีค่าสูงสุดเมื่อ $\beta = \beta^* = 5/3$

กราฟระหว่าง P และ β เป็นดังนี้



ค่า $\beta^* = 5/3$ ตรงกับประสิทธิภาพ $\eta^* = 1 - 1/\beta^* = 2/5$ ซึ่งเป็นประสิทธิภาพที่กำลังสูงสุด

g) ใช้ $W = \eta' Q_H = \eta' k(T_H - T'_H)\Delta t$ และ $P = W/2\Delta t$:

$$P = k \frac{\eta'}{2} (T_H - T'_H) = k T_H \frac{\eta'}{2} \left(1 - \frac{T'_H}{T_H}\right)$$

ต่อไปเราจะพยายามเขียน T'_H/T_H ในรูปของ η และ η'

เนื่องจาก $a \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow a$ ผันกลับได้ ดังนั้น $Q_H/T'_H = Q_C/T'_C$ และ $\eta' = 1 - Q_C/Q_H = 1 - T'_C/T'_H$ จากการพิจารณาการนำความร้อนในขั้นตอน $c \rightarrow d$ เราสามารถเขียน $Q_C = k(T'_C - T_C)\Delta t$

$$\begin{aligned} \frac{Q_C}{Q_H} &= \frac{k\Delta t(T'_C - T_C)}{k\Delta t(T_H - T'_H)} \\ 1 - \eta' &= \frac{T'_C - T_C}{T_H - T'_H} \\ 1 - \eta' &= \frac{(1 - \eta')T'_H - (1 - \eta)T_H}{T_H - T'_H} \\ (1 - \eta')T_H - (1 - \eta')T'_H &= (1 - \eta')T'_H - (1 - \eta)T_H \\ (2 - \eta' - \eta)T_H &= 2(1 - \eta')T'_H \\ \frac{T'_H}{T_H} &= \frac{2 - \eta' - \eta}{2(1 - \eta')} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$P = k T_H \frac{\eta'}{2} \left(1 - \frac{2 - \eta' - \eta}{2(1 - \eta')}\right) = k T_H \underbrace{\frac{\eta'(\eta - \eta')}{4(1 - \eta')}}_{g(\eta, \eta')}$$

h) ใช้ $dg/d\eta' = 0$ เพื่อหา η' ที่ทำให้ g สูงสุด :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta'} \left(\frac{\eta\eta' - \eta'^2}{1 - \eta'} \right) &= \frac{(\eta - 2\eta')(1 - \eta') + \eta\eta' - \eta'^2}{(1 - \eta')^2} \\ 0 &= \frac{\eta'^2 - 2\eta' + \eta}{(1 - \eta')^2} \end{aligned}$$

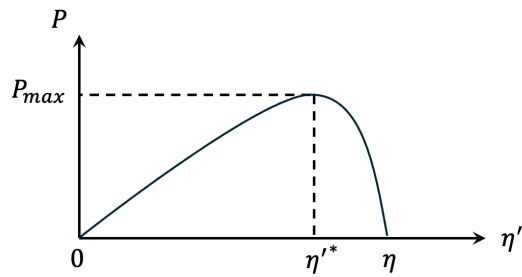
เนื่องจาก $\eta' < 1$ เราจะได้ $\eta'^2 - 2\eta' + \eta = 0$

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\eta}}{2} \\ &= 1 - \sqrt{1 - \eta} \end{aligned}$$

กำลังมีค่าสูงสุดเมื่อ $\eta' = \eta'^* = 1 - \sqrt{1 - \eta}$

หมายเหตุ : เมื่อแทน $\eta = 1 - T_C/T_H$ (ประสิทธิภาพคาร์โนต์) จะเห็นว่าประสิทธิภาพที่กำลังสูงสุด $\eta'^* = 1 - \sqrt{T_C/T_H}$ มีค่าต่ำกว่าประสิทธิภาพคาร์โนต์

กราฟระหว่าง P และ η' เป็นดังนี้



***** จบข้อ 1 *****

ข้อที่ 2.

[10 คะแนน]

a) จักรุปสมการ จะได้

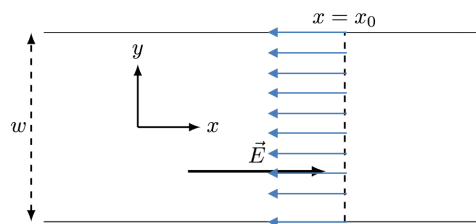
$$-neE\tau = \Pi_x$$

ความหนาแน่นโมเมนตัมที่ได้จะให้ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเป็น

$$j_x = \frac{ne^2E\tau}{m}$$

ความหนาแน่นกระแสอยู่ในแนวแกน x ขนานกับสนามไฟฟ้าภายนอก นั่นคือ $\vec{j} = j_x \hat{x}$

b) ตอบข้อ 4) ความหนาแน่นโมเมนตัมมีทิศทางตรงข้ามกับสนามไฟฟ้าและมีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ



c) กระแสไฟฟ้าทั้งหมดที่ไหลผ่านความกว้างหาได้จาก

$$I = \int_{-w/2}^{w/2} j_x dy = \frac{ne^2E\tau w}{m}$$

หรือเนื่องจากความหนาแน่นกระแสมีค่าคงที่ทั้งความยาวหน้าตัด

$$I = j_x w = \frac{ne^2E\tau w}{m}$$

d) สำหรับการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ พิจารณาสมการ

$$neE = v \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial y^2}$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$\Pi_x = a_1 y^2 + a_2 y + a_3$$

พบว่า Π_x เป็นฟังก์ชันกับ y เท่านั้น จะได้ว่า

$$j_x = \tilde{a}_1 y^2 + \tilde{a}_2 y + \tilde{a}_3$$

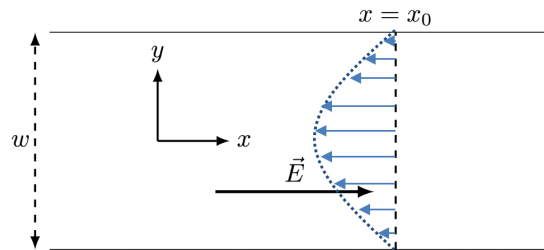
ค่าคงที่ a_2 และ a_3 หาได้จากเงื่อนไขขอบ $j_x = 0$ เมื่อ $y = \pm \frac{w}{2}$ จะได้ $a_2 = 0$ และ $a_3 = -\frac{neE w^2}{2v 4}$

ความหนาแน่นกระแสในกรณีนี้มีค่าเป็น

$$j_x = \frac{ne^2E}{2vm} \left(\frac{w^2}{4} - y^2 \right)$$

ความหนาแน่นกระแสมือองค์ประกอบในแนวแกน x เท่านั้น นั่นคือ $\vec{j} = j_x \hat{x}$ โดยที่ขนาดของกระแสขึ้นอยู่กับ y

e) ตอบข้อ 2) ความหนาแน่นโมเมนตัมมีทิศทางตรงข้ามกับสนามไฟฟ้า มีการกระจายตัวไม่สม่ำเสมอ มีรูปแบบการไหลแบบพาราโบลา



f) กระแสไฟฟ้าหาได้จาก

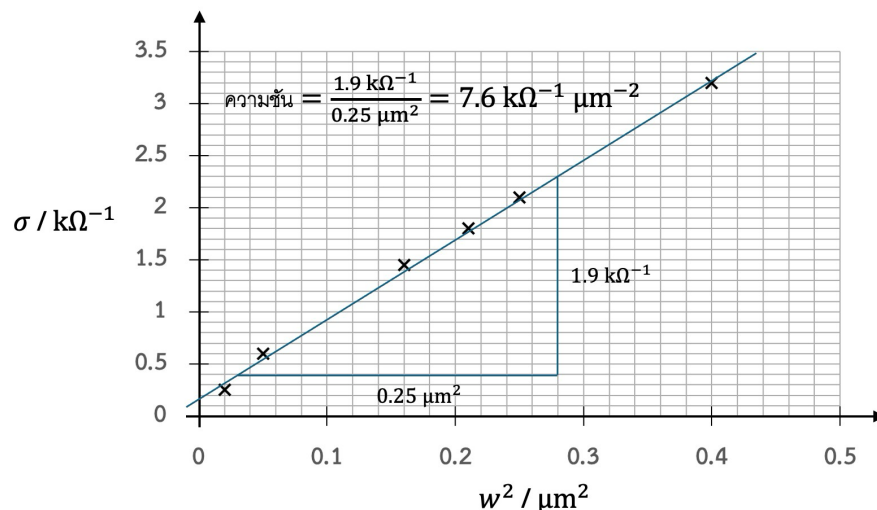
$$I = \int_{-w/2}^{w/2} j_x dy = \frac{ne^2Ew^3}{12vm}$$

จะได้ความหนาแน่นกระแสต่อความกว้างมีค่า

$$\frac{I}{w} = \frac{ne^2Ew^2}{12vm}$$

เราพบว่าในกรณีการไหลแบบมีความหนืดความหนาแน่นกระแสมีค่าไม่คงที่ตลอดทั้งหน้าตัด ทำให้ $\frac{I}{w}$ ขึ้นอยู่กับกำลังสองของความกว้างของแผ่นแกรฟีน แตกต่างจากกรณีของการไหลแบบโอห์มที่ $\frac{I}{w}$ มีค่าคงที่

g)



จากรูปจะได้ความชันของกราฟมีค่า $s = \frac{1.9 \text{ k}\Omega^{-1}}{0.25 \text{ }\mu\text{m}^2} = 7.6 \frac{\text{k}\Omega^{-1}}{\mu\text{m}^2}$

ความชันของกราฟมีค่าเป็น

$$s = \frac{ne^2}{12vm}$$

จะได้ความหนา

$$v \approx 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$$

h) ในกรณีการไหลแบบโอห์ม

$$j_x = \frac{ne^2 E \tau}{m}$$

จะได้

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{ne^2 E^2 \tau}{m}$$

ผลเฉลยทั่วไปจะได้

โดยที่ค่าคงที่ $a_1 a_2 a_3$ หาได้จากเงื่อนไขค่าขอบ

$$T\left(\pm \frac{w}{2}\right) = T_0$$

จะได้

$$a_1 = -\frac{ne^2 E^2 \tau}{2\eta m}$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = T_0 + \frac{ne^2 E^2 \tau w^2}{2\eta m} \frac{1}{4}$$

ค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น

$$\overline{\Delta T} = \frac{ne^2 E^2 \tau}{12\eta m} w^2$$

i) ในกรณีการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์

$$j_x = \frac{ne^2 E}{2vm} \left(\frac{w^2}{4} - y^2 \right)$$

จะได้

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{ne^2 E^2}{2vm} \left(\frac{w^2}{4} - y^2 \right)$$

ในกรณีนี้จะได้ผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$T(y) = a_1 y^4 + a_2 y^3 + a_3 y^2 + a_4 y + a_5$$

จากการอินทิเกรตจะได้

$$a_1 = \frac{ne^2 E^2}{24v\eta m}$$

และจากเงื่อนไขค่าขอบจะได้

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{ne^2 E^2}{16v\eta m} w^2$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = T_0 + \frac{ne^2 E^2}{4\eta v m} \frac{5w^4}{96}$$

ค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น

$$\overline{\Delta T} = \frac{ne^2 E^2}{120v\eta m} w^4$$

พบว่าสำหรับการไหลแบบโอห์มอุณหภูมิเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นจะขึ้นอยู่กับกำลังสองความกว้างของแกรฟีน ในขณะที่
สำหรับการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์อุณหภูมิเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นจะขึ้นอยู่กับกำลังสี่ความกว้างของแกรฟีน

***** จบข้อ 2 *****

ข้อที่ 3.

[10 คะแนน]

ตอนที่ 1 โมเมนต์ความเฉื่อยของบูมเมอแรง

- a) บูมเมอแรงประกอบด้วย 4 แฉก กำหนดให้มวลรวมคือ M ดังนั้นแต่ละแฉกจะมีมวล $m = M/4$ แต่ละแฉกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง $W = \beta\ell$ และยาว $L = \ell$

พิจารณาปีก 1 ใบที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล (CM) ของปีกนั่นเอง จะมีโมเมนต์ความเฉื่อยคือ:

$$I_{\text{CM}} = \frac{m(W^2 + L^2)}{12}$$

แทนค่า m , W และ L ลงไป:

$$I_{\text{CM}} = \frac{\frac{M}{4}((\beta\ell)^2 + \ell^2)}{12} = \frac{M\ell^2(\beta^2 + 1)}{48}$$

จุดศูนย์กลางมวลของแต่ละแฉกอยู่ห่างจากจุดกำเนิด O เป็นระยะ $d = \ell/2$ ใช้ทฤษฎีบทแกนขนาน (Parallel axis theorem) เพื่อหาโมเมนต์ความเฉื่อยของปีก 1 รอบจุด O :

$$I_O \text{ ของปีก 1} = I_{\text{CM}} + md^2 = \frac{M\ell^2(\beta^2 + 1)}{48} + \left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2(\beta^2 + 4)}{48}$$

เนื่องจากบูมเมอแรงมีปีกทั้งหมด 4 แฉก โมเมนต์ความเฉื่อยรวมทั้งหมด I จึงมีค่าเป็น:

$$I = 4 \times \frac{M\ell^2(\beta^2 + 4)}{48} = \frac{1}{12} M\ell^2(\beta^2 + 4)$$

ตอนที่ 2 แรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับบูมเมอแรง

- b) จากสมการแรงยก: $dF = \frac{1}{2} C_L \rho v_t^q dA$ เราจะใช้การวิเคราะห์เชิงมิติ (Dimensional analysis) ในหน่วยฐาน (M = มวล, L = ความยาว, T = เวลา) ดังนี้:

$$\text{มิติของแรง } [dF] = MLT^{-2}$$

$$\text{มิติของความหนาแน่น } [\rho] = ML^{-3}$$

$$\text{มิติของอัตราเร็วสัมพัทธ์แนวตั้งฉาก } [v_t] = LT^{-1}$$

$$\text{มิติของพื้นที่ } [dA] = L^2$$

ค่าคงที่ $\frac{1}{2}$ และสัมประสิทธิ์ C_L เป็นค่าที่ไม่มีมิติ (Dimensionless)

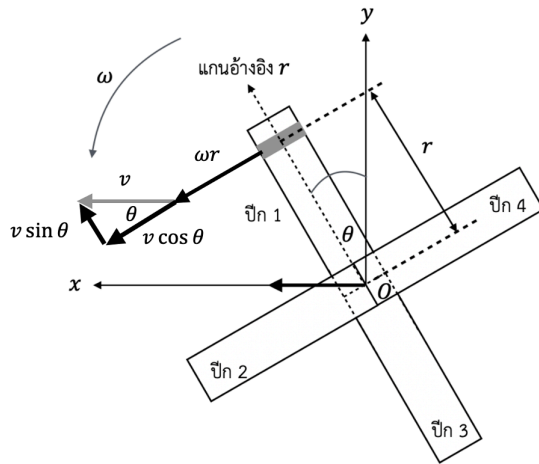
$$\text{แทนค่ามิติเหล่านี้ลงในสมการ: } MLT^{-2} = (ML^{-3})^p (LT^{-1})^q (L^2) = M^p L^{-3p+q+2} T^{-q}$$

$$\text{เปรียบเทียบเลขชี้กำลังของแต่ละหน่วยมิติ: } p = 1, -3p + q + 2 = 1 \text{ และ } -q = -2$$

หลังจากแก้สมการจะได้ $p = 1$ และ $q = 2$

c) ความเร็วของอากาศที่พัดผ่านปีก (เทียบกับปีก) เกิดจากผลรวมของ 2 ส่วนคือ:

- ความเร็วเชิงเส้น v ของจุดศูนย์กลางมวล
- ความเร็วเนื่องจากการหมุน v_{rot} ของปีก พิจารณาพื้นที่ย่อยที่ระยะ r บนปีก 1 ขนาดของความเร็วจากการหมุนคือ ωr มีทิศตั้งฉากกับแกนอ้างอิง r

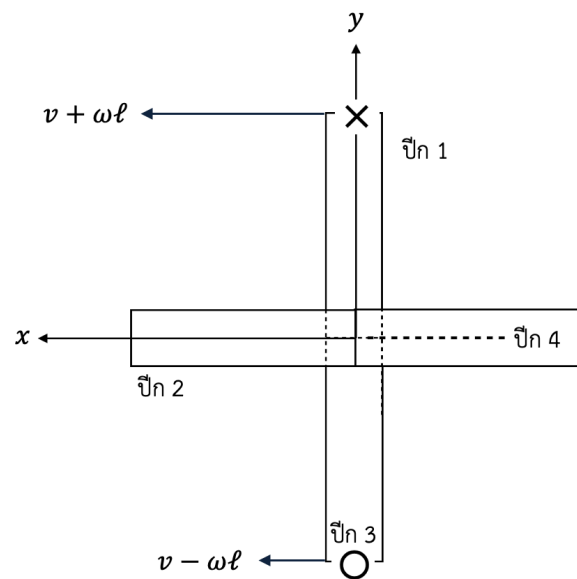


จากแผนภาพการรวมเวกเตอร์

อัตราเร็วสัมพัทธ์แนวตั้งฉาก $v_t = \omega r + v \cos \theta$

d) ขณะที่มุม $\theta = 0^\circ$

ที่ปลายปีกด้านบนสุดจะมีความเร็วมากที่สุด
เนื่องจากความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลและ
ความเร็วจากการหมุนมีทิศทางไปทางเดียวกัน
และที่ปลายปีกด้านล่างสุดจะมีความเร็วน้อยสุด
เนื่องจากความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลและ
ความเร็วจากการหมุนมีทิศตรงข้ามกัน



e) พิจารณาหาแรงยกที่กระทำบนปีก 1 จากสมการ $dF = \frac{1}{2} C_L \rho (v \cos \theta + \omega r)^2 dA$ และแทน $dA = \beta \ell dr$ หลังจากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดความยาวปีก 1 จาก $r = 0$ ถึง $r = \ell$:

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell \left[\frac{\omega^2 r^3}{3} + \omega v r^2 \cos \theta + v^2 r \cos^2 \theta \right]_0^\ell$$

$$= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} + \omega v \ell \cos \theta + v^2 \cos^2 \theta \right)$$

สำหรับปีก 2, 3 และ 4 ซึ่งทำมุม $\theta + \frac{\pi}{2}$, $\theta + \pi$ และ $\theta + \frac{3\pi}{2}$ จะได้แรงยกเป็น:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} + \omega v \ell \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + v^2 \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} - \omega v \ell \sin \theta + v^2 \sin^2 \theta \right) \\ F_3 &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} + \omega v \ell \cos(\theta + \pi) + v^2 \cos^2(\theta + \pi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} - \omega v \ell \cos \theta + v^2 \cos^2 \theta \right) \\ F_4 &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} + \omega v \ell \cos \left(\theta + \frac{3\pi}{2} \right) + v^2 \cos^2 \left(\theta + \frac{3\pi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} + \omega v \ell \sin \theta + v^2 \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

รวมแรงจากทั้ง 4 ปีก พจน์กลาง ($\pm \sin \theta$ และ $\pm \cos \theta$) จะหักล้างกัน θ และใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ทำให้แรงลัพธ์ ไม่ขึ้นกับมุม:

$$\begin{aligned} F_{\text{total}} &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^2 \left[4 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{3} \right) + 2v^2 \right] \\ F_{\text{total}} &= \rho C_L \beta \ell^2 \left(\frac{2}{3} \omega^2 \ell^2 + v^2 \right) \end{aligned}$$

เมื่อเทียบกับสมการ $F_{\text{total}} = \rho C_L \beta \ell^2 (\alpha_1 \omega^2 \ell^2 + \alpha_2 \omega v \ell + \alpha_3 v^2)$ จะได้ค่าคงที่ $\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = 0$ และ $\alpha_3 = 1$

- f) พิจารณาขนาดของทอร์กบนปีก 1 ($d\tau_1 = r dF_1$) แล้วอินทิเกรตตลอดความยาวปีก 1:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \int_0^\ell \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell (\omega^2 r^3 + 2\omega v r^2 \cos \theta + v^2 r \cos^2 \theta) dr \\ &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^3 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{4} + \frac{2}{3} \omega v \ell \cos \theta + \frac{v^2}{2} \cos^2 \theta \right) \end{aligned}$$

ใช้ความสมมาตรหาขนาดทอร์กบนปีก 2, 3 และ 4:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^3 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{4} - \frac{2}{3} \omega v \ell \sin \theta + \frac{v^2}{2} \sin^2 \theta \right) \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^3 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{4} - \frac{2}{3} \omega v \ell \cos \theta + \frac{v^2}{2} \cos^2 \theta \right) \\ \tau_4 &= \frac{1}{2} \rho C_L \beta \ell^3 \left(\frac{\omega^2 \ell^2}{4} + \frac{2}{3} \omega v \ell \sin \theta + \frac{v^2}{2} \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

คูณด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางทอร์กจะได้:

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \tau_1 \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \tau_3 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + \tau_4 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

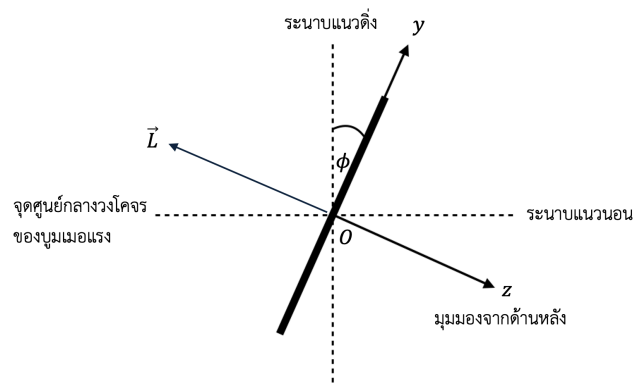
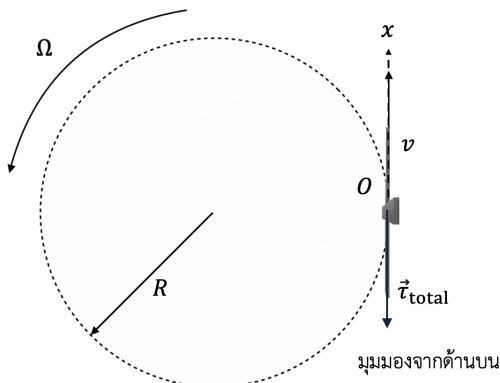
แยกแนวแกน x: $\tau_x = -(\tau_1 - \tau_3) \cos \theta + (\tau_2 - \tau_4) \sin \theta$

$$\begin{aligned} &= -\left(\frac{2}{3} \rho C_L \beta \ell^4 \omega v \right) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= -\frac{2}{3} \rho C_L \beta \ell^4 \omega v \end{aligned}$$

แยกแนวแกน y : $\tau_y = (\tau_1 - \tau_3) \sin \theta + (\tau_2 - \tau_4) \cos \theta = 0$

ขนาดของทอร์กลัพธ์คือ $\tau_{\text{total}} = \frac{2}{3} \rho C_L \beta \ell^4 \omega v$ เมื่อเทียบกับสมการ $\tau_{\text{total}} = \rho C_L \beta \ell^3 (\lambda_1 \omega^2 \ell^2 + \lambda_2 \omega v \ell + \lambda_3 v^2)$ จะได้ค่าคงที่ $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ และ $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

- g) วาดลูกศรเพื่อแสดงทิศทางของเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ และ เวกเตอร์ทอร์กลัพธ์รอบจุดศูนย์กลางมวล $\vec{\tau}_{\text{total}}$ ดังที่แสดงในรูป



- h) สมการการเคลื่อนที่แบบหมุนควง (Gyroscopic precession) สัมพันธ์กับทอร์กตามสมการ:

$$\tau_{\text{total}} \Delta t = (\Omega \Delta t) (L \cos \phi) \Rightarrow \Omega = \frac{\tau_{\text{total}}}{L \cos \phi}$$

แทน

- ขนาดของทอร์กลัพธ์ $\tau_{\text{total}} = \frac{2}{3} \rho C_L \beta \ell^4 \omega v$
- ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $L = I \omega = \frac{1}{12} M \ell^2 (\beta^2 + 4) \omega$

ลงในสมการ $\Omega = \frac{\tau_{\text{total}}}{L \cos \phi}$ จะได้

$$\Omega = \frac{\left(\frac{2}{3} \rho C_L \beta \omega v \ell^4 \right)}{\left(\frac{M \ell^2 (\beta^2 + 4)}{12} \omega \right) \cos \phi} = \frac{8 \rho C_L \beta \ell^2 v}{M (\beta^2 + 4) \cos \phi}$$

- i) จากการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ความสัมพันธ์ของอัตราเร็วเชิงเส้นและอัตราเร็วเชิงมุมของการโคจรคือ $v = \Omega R$ จัดรูปสมการเพื่อหารัศมีวงโคจร R :

$$R = \frac{v}{\Omega}$$

นำสมการ Ω จากข้อ h) มาแทนค่า:

$$R = \frac{v}{\left[\frac{8 \rho C_L \beta \ell^2 v}{M (\beta^2 + 4) \cos \phi} \right]}$$

ตัดตัวแปร v และจัดรูปสมการ จะได้สมการของรัศมีวงโคจร R :

$$R = \frac{M (\beta^2 + 4) \cos \phi}{8 \rho C_L \beta \ell^2}$$

- j) เมื่อ v เพิ่มขึ้น (โดยสมมติให้ตัวแปรอื่นไม่เปลี่ยน) แรงแยกลัพธ์ F_{total} จะมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจาก $F_{\text{total}} \propto v^2$ จากสมดุลแรงในแนวดิ่ง $F_{\text{total}} \sin \phi = Mg$ เมื่อ F_{total} เพิ่มขึ้น ค่า $\sin \phi$ จะต้องลดลงเพื่อรักษาสมดุล การที่ $\sin \phi$ ลดลง หมายความว่ามุมเอียง ϕ มีค่าลดลง ส่งผลให้ค่า $\cos \phi$ มีค่าเพิ่มขึ้น
- เมื่อพิจารณาสมการรัศมีวงโคจร

$$R = \frac{M(\beta^2 + 4) \cos \phi}{8\rho C_L \beta \ell^2}$$

จะเห็นว่า R แปรผันตรงกับ $\cos \phi$ ดังนั้น เมื่อ $\cos \phi$ เพิ่มขึ้น รัศมีวงโคจร R จะมีค่าเพิ่มขึ้น (เลี้ยววงกว้างขึ้น)

***** จบข้อ 3 *****