

ข้อที่ 1. กำลังของเครื่องยนต์

[10 คะแนน]

ในทางอุณหพลศาสตร์ เครื่องยนต์ความร้อนที่ทำงานแบบผันกลับได้จะให้ประสิทธิภาพสูงสุด ซึ่งเท่ากับประสิทธิภาพของคาร์โนต์ (Carnot efficiency) แต่จะต้องทำงานโดยให้ระบบเปลี่ยนไปช้ามาก กล่าวคือ ลูกสูบเคลื่อนที่ช้ามากจนสามารถถือว่าสารทำงาน (Working substance) ในระบบอยู่ในภาวะสมดุลทุกขณะ เมื่อคำนวณหา กำลัง ซึ่งเท่ากับงานที่เครื่องยนต์ทำต่อเวลาในหนึ่งรอบการทำงาน พบว่ากำลังที่ได้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ อย่างไรก็ตาม เครื่องยนต์ที่ใช้งานจริงจำเป็นต้องให้กำลังที่ไม่เป็นศูนย์ และต้องทำงานในเวลาจำกัด ในข้อนี้เราต้องการศึกษาผลของเวลาในการทำงานต่อกำลังของเครื่องยนต์ ผ่านแบบจำลอง 2 แบบในตอนที่ 1 และตอนที่ 2 ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกัน

ข้อมูลที่สามารถนำมาใช้ในโจทย์ข้อนี้

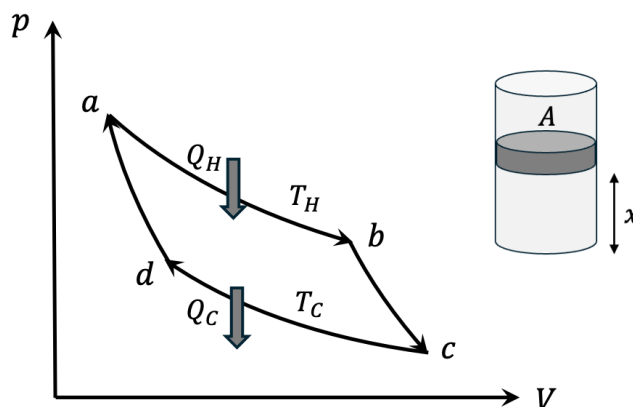
1. $\frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

ตอนที่ 1 แบบจำลองลูกสูบเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วจำกัด

รูปที่ 1 แสดงแผนภาพความดัน-ปริมาตรของวัฏจักรคาร์โนต์ ทำงานโดยมีแหล่งความร้อนอุณหภูมิสูง T_H และแหล่งความร้อนอุณหภูมิต่ำ T_C กระบวนการต่าง ๆ ประกอบด้วย

- | | |
|---|-------------------------------|
| $a \rightarrow b$ ไอโซเทอร์มอล สารทำงานมีอุณหภูมิ T_H | $b \rightarrow c$ แอเดียแบติก |
| $c \rightarrow d$ ไอโซเทอร์มอล สารทำงานมีอุณหภูมิ T_C | $d \rightarrow a$ แอเดียแบติก |

กำหนดให้สารทำงานมีความดัน p_i และปริมาตร V_i ที่จุด $i = a, b, c, d$ สารทำงานได้รับความร้อนขนาด Q_H และทิ้งความร้อนขนาด Q_C ($Q_C > 0$) สมมติให้ลูกสูบเคลื่อนที่ช้าพอและไม่มีการสูญเสียใด ๆ จึงสามารถประมาณให้วัฏจักรเป็นแบบผันกลับได้ และเอนโทรปีรวมไม่เปลี่ยนแปลง



รูปที่ 1 แผนภาพความดัน-ปริมาตร ปริมาตรถูกกำหนดโดยระยะ x ของทรงกระบอก

- a) โดยการพิจารณาเอนโทรปี จงพิสูจน์ว่าประสิทธิภาพ $\eta = 1 - T_C/T_H$ [1.0 คะแนน]

ในตอนนี้ (และเฉพาะตอนนี้) สมมติให้สารทำงานเป็นแก๊สอุดมคติจำนวน 1 โมล

- b) จงแสดงวิธีหา Q_H (ตอบในรูปของ T_H, V_a, V_b และค่าคงตัวทางฟิสิกส์) [1.0 คะแนน]

- c) จงหางาน W ที่แก๊สทำใน 1 รอบ (ตอบในรูปของ T_H, T_C, V_a, V_b และค่าคงตัวทางฟิสิกส์) [0.5 คะแนน]

ในรูปที่ 1 ระยะ x วัดจากกันทรงกระบอกแสดงถึงปริมาตรของแก๊ส กำหนดให้ลูกสูบมีพื้นที่หน้าตัด A และมีอัตราเร็วเฉลี่ย $\bar{v}$ กล่าวคือ นักเรียนสามารถใช้อัตราเร็วนี้ได้ในทุกกระบวนการ

- d) จงหาเวลาที่ลูกสูบใช้ในการเคลื่อนที่ 1 รอบ (ตอบในรูปของ V_a, V_C, A และ $\bar{v}$) [0.5 คะแนน]

กำหนดให้ $\alpha = V_b/V_a$ และ $\beta = T_H/T_C$ เป็นพารามิเตอร์ของระบบ ถ้า α มีค่ามาก ลูกสูบจะใช้เวลาในช่องไอโซเทอร์มอล และถ้า β มีค่ามาก ลูกสูบจะใช้เวลาในช่องแอดิแบติก ดังนั้น เวลาที่ลูกสูบใช้ในการเคลื่อนที่ 1 รอบจะขึ้นกับ α และ β สมมติให้แก๊สมี้อัตราส่วนของความจุความร้อน $\gamma = 5/3$

- e) จงแสดงว่ากำลังของการทำงานใน 1 รอบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$P = p_a A \bar{v} \cdot f(\alpha, \beta)$$

โดยที่ $f(\alpha, \beta)$ เป็นฟังก์ชันที่นักเรียนต้องระบุ

[1.5 คะแนน]

- f) เมื่อกำหนด p_a ค่าหนึ่ง และสมมติให้ $\alpha \gg 1$ จงหาค่า $\beta = \beta^*$ ที่ทำให้กำลังสูงสุด ($P_{\max}$) จงเขียนกราฟระหว่าง P กับ β โดยให้เห็นลักษณะสำคัญของกราฟ และหาประสิทธิภาพ $\eta = \eta^*$ ที่กำลังสูงสุด

[2.0 คะแนน]

ตอนที่ 2 แบบจำลองการนำความร้อน

กำหนดให้แหล่งความร้อนมีอุณหภูมิ T_H และ T_C ตามลำดับ สมมติให้สารทำงานไม่ได้อยู่ในสมดุลความร้อนกับแหล่งความร้อนดังกล่าว แต่เกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างสารทำงานและแหล่งความร้อนตามที่แสดงในรูปที่ 2 กระบวนการต่าง ๆ ในวัฏจักรมีดังนี้

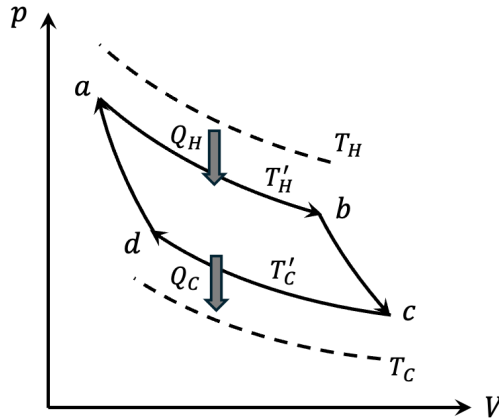
$a \rightarrow b$ ไอโซเทอร์มอล สารทำงานมีอุณหภูมิ T_H'

$b \rightarrow c$ แอเดียแบติก

$c \rightarrow d$ ไอโซเทอร์มอล สารทำงานมีอุณหภูมิ T_C'

$d \rightarrow a$ แอเดียแบติก

วัฏจักรของสารทำงานลักษณะนี้เป็นตัวอย่างของการผันกลับได้ภายใน (Endoreversible) แต่ปฏิสัมพันธ์กับภายนอก เช่น การถ่ายเทความร้อนกับแหล่งความร้อน ไม่สามารถผันกลับได้



รูปที่ 2 แผนภาพความดัน-ปริมาตร

ในกระบวนการ $a \rightarrow b$ และ $c \rightarrow d$ สมมติให้อัตราการถ่ายเทความร้อนขึ้นอยู่กับผลต่างอุณหภูมิ และสัมประสิทธิ์การนำความร้อน k (ใช้ k เดียวกันในทั้ง 2 กระบวนการ) กำหนดให้กระบวนการ $a \rightarrow b$ ดำเนินไปนาน Δt ในระหว่างนี้สารทำงานได้รับความร้อนขนาด $Q_H = k(T_H - T'_H)\Delta t$ สมมติให้ช่วง $c \rightarrow d$ ดำเนินไปนาน Δt เช่นเดียวกัน ในระหว่างนี้สารทำงานคายความร้อนขนาด Q_C ($Q_C > 0$)

กำหนดให้ $\eta = 1 - T_C/T_H$ (ประสิทธิภาพคาร์โนต์) และวัฏจักร $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ มีประสิทธิภาพ η'

- g) สมมติให้ช่วงเวลาในกระบวนการแอดิแบติกน้อยมากจนตัดทิ้งได้ โดยการพิจารณางานใน 1 รอบ จงแสดงว่ากำลังของการทำงานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$P = kT_H \cdot g(\eta, \eta')$$

โดยที่ $g(\eta, \eta')$ เป็นฟังก์ชันที่นักเรียนต้องระบุ

[2.0 คะแนน]

- h) สำหรับแหล่งความร้อนคู่หนึ่ง (มี η ค่าหนึ่ง) จงหา $\eta' = \eta'^*$ ที่ให้กำลังสูงสุด ($P_{\max}$) โดยให้ตอบในรูปของ η จงเขียนกราฟระหว่าง P กับ η' โดยให้เห็นลักษณะสำคัญของกราฟ

[1.5 คะแนน]

ข้อที่ 2 อิเล็กตรอนไฮโดรไดนามิกส์ในแกรฟีน

[10 คะแนน]

ข้อมูลที่สามารถนำมาใช้ในโจทย์ข้อนี้

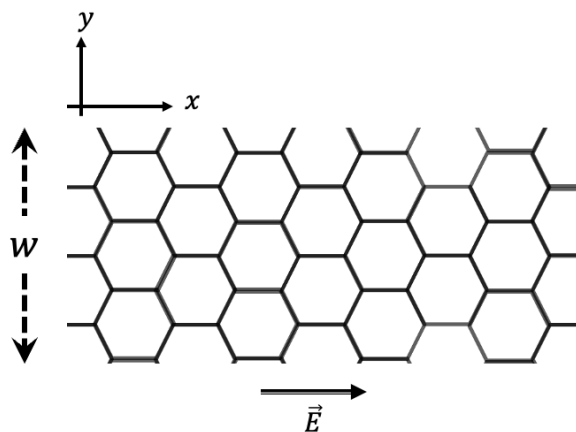
1. ขนาดของประจุอิเล็กตรอน $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$
2. มวลของอิเล็กตรอนอิสระ $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{kg}$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{ค่าคงที่}$ และ $n \neq -1$

แกรฟีน (Graphene) เป็นวัสดุตัวนำ 2 มิติที่ประกอบไปด้วยอะตอมคาร์บอนเรียงตัวกันเป็นผลึกแบบรังผึ้ง อิเล็กตรอนในแกรฟีนสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระทั่วทั้งผลึก โดยทั่วไปผลึกแกรฟีนมักมีสิ่งเจือปน (impurity) การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนผ่านสิ่งเจือปนเหล่านี้ส่งผลให้เกิดสภาพต้านทานไฟฟ้า การไหลของอิเล็กตรอนแบบนี้เรียกว่า การไหลแบบโอห์ม

พิจารณาแผ่นแกรฟีนที่ยาวเป็นอนันต์ (Infinitely long channel) ซึ่งมีความกว้าง w ดังรูปที่ 1 กำหนดระบบพิกัดให้ขอบของแกรฟีนอยู่ที่ $y = w/2$ และ $y = -w/2$ เมื่อให้สนามไฟฟ้าภายนอกซึ่งมีขนาดคงที่ตามแนวแกน x แก่แกรฟีนแล้ว แรงไฟฟ้าจะส่งผลให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยความหนาแน่นโมเมนตัม (โมเมนตัมต่อพื้นที่) Π_x โดยสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นโมเมนตัมมีความสัมพันธ์ตามสมการ

$$-neE = \Pi_x / \tau \quad (1)$$

เมื่อ E คือขนาดของสนามไฟฟ้า n คือ ความหนาแน่นอิเล็กตรอนใน 2 มิติมีหน่วยเป็น m^{-2} e คือขนาดของประจุของอิเล็กตรอน และ τ คือ เวลาโดยเฉลี่ยที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ได้อย่างเป็นอิสระโดยไม่ชนสิ่งเจือปน (Relaxation time) ความหนาแน่นของโมเมนตัมมีหน่วยในระบบ SI เป็น $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$



รูปที่ 1 แผ่นแกรฟีน

ในทางปฏิบัติเรามักจะวัดการไหลของกระแสไฟฟ้าผ่านความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าต่อความกว้าง $j_x = -\frac{e}{m} \Pi_x$ และมีหน่วยเป็น $\text{C m}^{-1}\text{s}^{-1}$ โดยที่ m คือมวลยังผล (Effective mass) ซึ่งเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโครงผลึกแบบตาข่าย (Lattice) ซึ่งส่งผลให้มวลยังผลของอิเล็กตรอนในแกรฟีนมีค่าเป็น 0.01 เท่าของมวลของอิเล็กตรอนอิสระ

a) จงหาความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ไหล ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ในแผ่นแกรฟีน [0.5 คะแนน]

b) จงเลือกรูปในกระดาดสรุปคำตอบที่อธิบายความหนาแน่นของโมเมนตัมในแกรฟีนสำหรับการไหลของกระแสแบบโอห์มได้ถูกต้อง [0.2 คะแนน]

c) จงหากระแสไฟฟ้าทั้งหมดที่ไหลผ่านแผ่นแกรฟีนที่มีความกว้าง w [0.8 คะแนน]

สิ่งเจือปนในแกรฟีนเป็นสาเหตุหลักที่ทำให้เกิดสภาพต้านทานไฟฟ้าและส่งผลกระทบต่อประสิทธิภาพของอุปกรณ์ไฟฟ้าสูญเสียไปในรูปของความร้อน ในรอบทศวรรษที่ผ่านมาความพยายามอย่างต่อเนื่องที่จะสังเคราะห์แกรฟีนให้มีคุณภาพดีขึ้น คือ มีสิ่งสกปรกน้อยลงเพื่อลดการสูญเสียพลังงานดังกล่าว สำหรับแกรฟีนที่มีคุณภาพดีมาก ๆ กล่าวคือมีสิ่งเจือปนอยู่น้อย โอกาสที่อิเล็กตรอนจะชนกันเองผ่านอันตรกิริยาโคลอมบ์จะเกิดขึ้นได้มากกว่าเมื่อเทียบกับการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนกับสิ่งเจือปน ส่งผลให้อิเล็กตรอนมีการเคลื่อนที่เช่นเดียวกับการไหลของของไหลทั่วไป การเคลื่อนที่แบบนี้ เรียกว่า การไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ พฤติกรรมแบบไฮโดรไดนามิกส์ของอิเล็กตรอนถูกอธิบายได้ด้วยสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานหนึ่งของวิชากลศาสตร์ของไหล

ปัจจุบันการไหลของอิเล็กตรอนแบบไฮโดรไดนามิกส์ได้รับการยืนยันจากผลการทดลองในวัสดุ 2 มิติที่มีคุณภาพดี เช่น แกรฟีน และเกลเลียมอาเซนไนด์ เป็นต้น

หลังจากนี้เป็นต้นไป เราจะพิจารณาการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ในแกรฟีน ในที่นี้เราสนใจการไหลคงตัว (Steady flow) ของของไหลอิเล็กตรอนที่มีเลขเรย์โนลด์ต่ำซึ่งสามารถสรุปสมการนาเวียร์-สโตกส์ได้เป็น

$$neE = v \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial y^2} \quad (2)$$

เมื่อ v คือสัมประสิทธิ์ความหนืด โดยที่ความหนืดเป็นปริมาณที่กำหนดสภาพต้านทานไฟฟ้าในการไหลของอิเล็กตรอนแบบไฮโดรไดนามิกส์

นอกจากนี้ความหนียังส่งผลให้เกิดแรงเสียดทานระหว่างอิเล็กตรอนกับขอบของแผ่นแกรฟีนทำให้ไม่มีกระแสไฟฟ้าไหลที่ขอบ นั่นคือ $j(y = \pm w/2) = 0$

d) สำหรับการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ จงหาความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ไหล ณ ตำแหน่ง y ใด ๆ

[1.7 คะแนน]

e) จงเลือกรูปในกระดาศสรุปคำตอบที่อธิบายความหนาแน่นของโมเมนตัมในแกรฟีนสำหรับการไหลของกระแสแบบไฮโดรไดนามิกส์ได้ถูกต้อง

[0.2 คะแนน]

f) จงหากระแสไฟฟ้าทั้งหมดต่อความกว้าง I/w ในกรณีการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ คำตอบที่ได้ต่างจากกรณีการไหลแบบโห้หม้อย่างไร

[1.8 คะแนน]

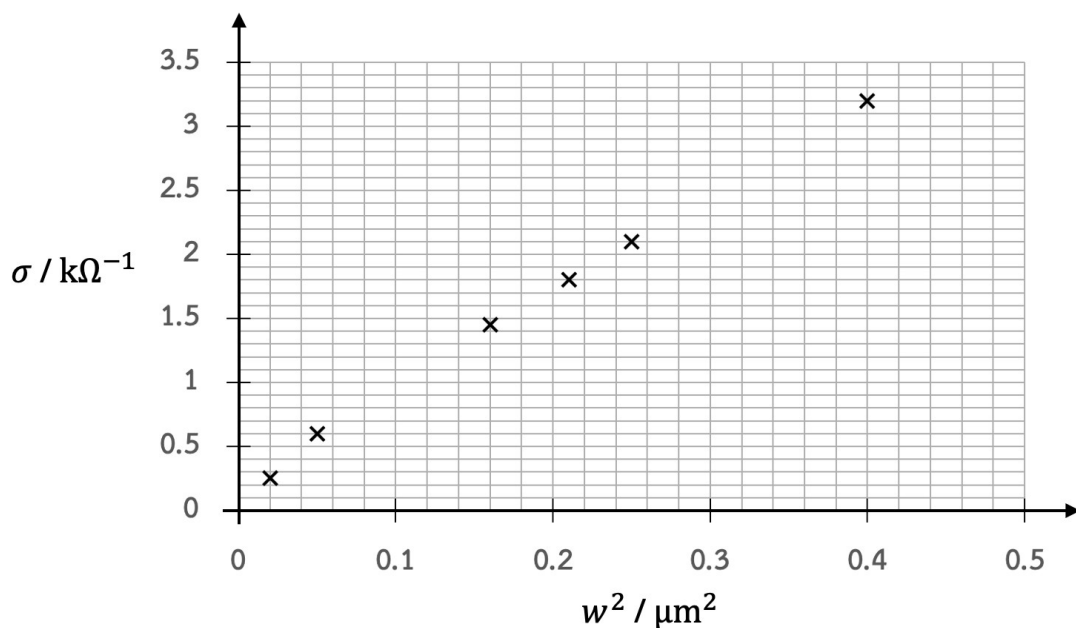
ในการทดลองเพื่อยืนยันการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ในแกรฟีน สภาพนำไฟฟ้า σ จะถูกวัดในแกรฟีนที่มีความกว้างต่าง ๆ กัน

สภาพนำไฟฟ้าในที่นี้ถูกนิยามให้เป็นอัตราส่วนระหว่างกระแสต่อความกว้างกับสนามไฟฟ้าภายนอก

$$\sigma = \frac{I/w}{E} \quad (3)$$

ซึ่งมีหน่วยเป็น Ω^{-1} ในระบบ SI

ในการทดลองจริงผลการวัดความนำไฟฟ้าของแผ่นกราฟีนที่มีความหนาแน่นอิเล็กตรอน $1.0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ ยาว 5 ไมโครเมตรที่ความกว้างค่าต่างๆ ถูกแสดงด้วยกราฟในรูปที่ 2



รูปที่ 2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพนำไฟฟ้ากับความกว้างของแกรฟีนยกกำลังสอง

g) จงหาความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในแกรฟีนจากกราฟในรูปที่ 2

[1.0 คะแนน]

นอกจากการวัดสภาพนำไฟฟ้าแล้ว การวัดอุณหภูมิเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นจากสนามไฟฟ้าภายนอกที่ให้เข้าไป (Joule heating) เป็นอีกการทดลองหนึ่งที่สามารถแยกความแตกต่างระหว่างการไหลแบบโอห์มและการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ได้ ส่วนที่เหลือต่อไปนี้จะศึกษาปรากฏการณ์ดังกล่าว

ให้อุณหภูมิ T ที่ขอบทั้งสองของแผ่นแกรฟีนมีค่าคงที่ นั่นคือ $T = T_0$ ที่ $y = \pm w/2$ การกระจายตัวของอุณหภูมิในแผ่นแกรฟีนสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$-\eta \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (4)$$

เนื่องจากสมมาตรของระบบในแนวแกน x อุณหภูมิจึงขึ้นอยู่กับตำแหน่งในแนวแกน y เท่านั้น สมการนี้อธิบายสถานะคงตัวของระบบที่มีการกระจายอุณหภูมิให้สมดุลกับกำลังที่ให้เข้าไปจากสนามไฟฟ้าภายนอก โดยที่ η เป็นสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับทั้งสภาพนำความร้อนและความจุความร้อน

h) จงหาว่าในกรณีการไหลแบบโอห์ม สมการของอุณหภูมิขึ้นกับ y อย่างไรและจงหาค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นโดยนิยามให้ค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นหาได้จาก $\overline{\Delta T} = \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} (T(y) - T_0) dy$

[1.4 คะแนน]

i) จงหาว่าในกรณีการไหลแบบไฮโดรไดนามิกส์ อุณหภูมิขึ้นกับ y อย่างไร และจงหาค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น คำตอบของค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นต่างจากกรณีการไหลแบบโอห์มอย่างไร

[2.4 คะแนน]

ข้อที่ 3. แบบจำลองอย่างง่ายของบูมเมอแรง

[10 คะแนน]

บูมเมอแรง (Boomerang) เป็นเครื่องมือหรือของเล่นที่จัดอยู่ในกลุ่มวัตถุบินได้ ซึ่งมีลักษณะพิเศษที่น่าสนใจคือสามารถบินกลับมายังจุดเริ่มต้นที่ขว้างออกไปได้ บูมเมอแรงแบบดั้งเดิมมักมีลักษณะเป็นรูปจันทร์เสี้ยว (Crescent shape) ซึ่งประกอบด้วยปีกสองข้างที่เชื่อมต่อกันเป็นชิ้นเดียว แต่ทำมุมเอียงเข้าหากัน โดยหน้าตัดของปีกแต่ละด้านจะถูกออกแบบให้มีลักษณะคล้ายปีกเครื่องบิน (Airfoil) เพื่อสร้างแรงยกขณะเหินอากาศ ปัจจุบันบูมเมอแรงมีรูปร่าง ขนาด และวัสดุที่หลากหลาย นำไปสู่คำถามที่น่าสนใจมากมายเกี่ยวกับหลักการทำงานทางฟิสิกส์ของมัน

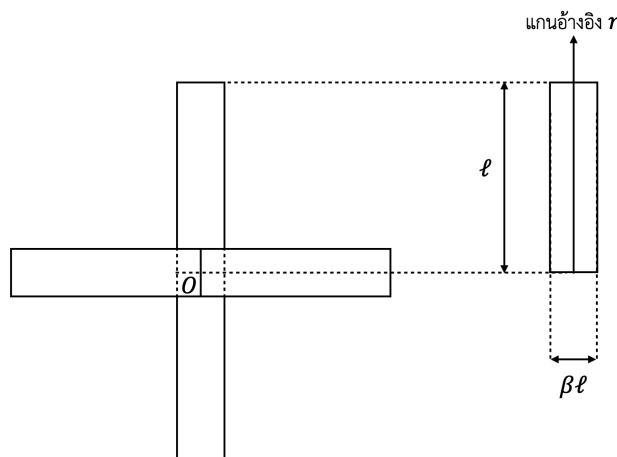
ข้อมูลที่สามารถนำมาใช้ในโจทย์ข้อนี้

- โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าความหนาแน่นสม่ำเสมอ M กว้าง W ยาว L ที่หมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและตั้งฉากกับแผ่น มีค่าเท่ากับ $M(W^2 + L^2)/12$
- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ และ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{ค่าคงที่}$ และ $n \neq -1$

ตอนที่ 1 โมเมนต์ความเฉื่อยของบูมเมอแรง

พิจารณาแบบจำลองบูมเมอแรง 4 ปีก (หรือแฉก) ในรูปที่ 1 ซึ่งประกอบขึ้นจากแผ่นวัสดุสม่ำเสมอ รูปร่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวน 4 แผ่น มาประกอบติดกันเป็นรูปกากบาท โดยให้จุดศูนย์กลางมวล (CM) ของบูมเมอแรงอยู่ที่จุด O แต่ละปีกมีความยาว ℓ (วัดจากจุด O ไปจนถึงปลายปีก) และมีความกว้าง $\beta\ell$ (เมื่อ β คือค่าคงที่) กำหนดให้มวลรวมของบูมเมอแรงคือ M (ดังนั้นแต่ละปีกมีมวล $M/4$)

เพื่อลดความซับซ้อนทางเรขาคณิต ให้สมมติว่าแฉกทั้ง 4 ต่อกันพอดีที่จุด O และเฉพาะในตอนที่ 1 ประเมินให้แผ่นปีกของบูมเมอแรงมีความหนาคงที่และบาง ไม่มีความนูน

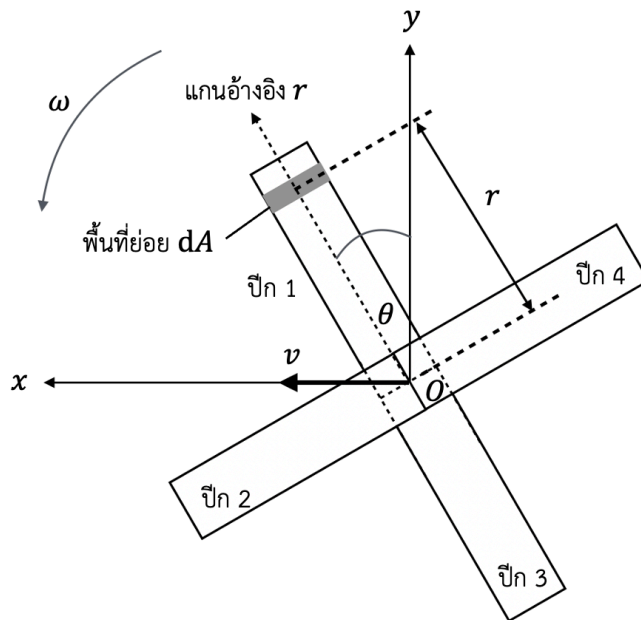


รูปที่ 1 (ซ้าย) แผนภาพแบบจำลองบูมเมอแรง 4 ปีก โดยมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุด O (ขวา) ขนาดของแต่ละปีก

- a) จงเขียนสมการโมเมนต์ความเฉื่อย (I) ของบูมเมอแรง 4 ปีกนี้ รอบแกนหมุนที่ผ่านจุด O และตั้งฉากกับระนาบของบูมเมอแรงในพจน์ของ M l และ β [0.5 คะแนน]

ตอนที่ 2 แรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับบูมเมอแรง

สมมติให้บูมเมอแรงถูกขว้างออกไปในอากาศ ที่เวลาหนึ่ง บูมเมอแรงหมุนอยู่ในระนาบการหมุน (ระนาบ xy) และแกนสมมาตรของปีก 1 (แกนอ้างอิง r) ทำมุม θ กับแกน y ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยจุดศูนย์กลางมวล O กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้นเทียบกับอากาศซึ่งมีขนาด v ตามแนวแกน x และบูมเมอแรงกำลังหมุนรอบจุด O ด้วยความเร็วเชิงมุม ω



รูปที่ 2 แผนภาพของบูมเมอแรงขณะกำลังเคลื่อนที่และหมุนในระนาบการหมุน

ในแบบจำลองทางอากาศพลศาสตร์ สมมติให้แผ่นปีกของบูมเมอแรงมีหน้าตัดรูคล้ายปีกเครื่องบิน (Airfoil) เพื่อสร้างแรงยกขึ้นมาได้ หากบูมเมอแรงเคลื่อนที่ผ่านอากาศนี้ แรงยก dF ที่กระทำตั้งฉากต่อพื้นที่ย่อย dA บนปีกของบูมเมอแรงขึ้นกับ v_t ตามสมการ

$$dF = \frac{1}{2} C_L \rho v_t^q dA \quad (1)$$

โดยที่ v_t คือขนาดขององค์ประกอบของความเร็วแนวตั้งฉาก (Transverse component) กับแกนอ้างอิง r ที่ปีกบูมเมอแรงเฉือนกับอากาศ ρ คือความหนาแน่นของอากาศ C_L คือสัมประสิทธิ์แรงยก (Lift coefficient) ซึ่งไม่มีมิติ p และ q เป็นเลขชี้กำลัง

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ ให้ใช้สมมติฐานดังต่อไปนี้:

- ไม่มีแรงต้านอากาศ (Drag force)
- สัมประสิทธิ์แรงยก C_L มีค่าคงที่ตลอดความยาวปีก และไม่มีการรบกวนทางอากาศพลศาสตร์ระหว่างแกนแต่ละแกน
- ในแบบจำลองนี้ไม่คิดผลของแรงยกจากองค์ประกอบของความเร็วในแนวอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากความเร็วในแนวตั้งฉากกับปีกมุมเมอแรง
- ความกว้างของปีกน้อยกว่าความยาวมาก ๆ ($\beta \ll 1$) ดังนั้นการกระจัดจากจุด O ไปยังจุดใด ๆ บนพื้นที่ย่อย dA มีค่าประมาณเท่ากับการกระจัด $\vec{r}$ จากจุด O ไปยังจุดศูนย์กลางของพื้นที่ย่อย dA
- ด้านบนของปีกมุมเมอแรงหันออกมาจากระนาบกระดาดในรูปที่ 2

b) จงระบุมิติของตัวแปรต่าง ๆ ในสมการ (1) และใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงมิติ (Dimensional analysis) เพื่อหาค่าคงที่ p และ q [1.5 คะแนน]

c) พิจารณาปีก 1 ในรูปที่ 2 จงเขียนสมการขนาดของ v_t ของพื้นที่ย่อย dA ที่เชื่อมกับอากาศ ในพจน์ของ v θ ω และ r เมื่อ r คือขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}$ [0.6 คะแนน]

d) ขณะที่มุม $\theta = 0^\circ$ และสมมติให้ $v > \omega \ell$
จงทำเครื่องหมาย $\times$ ณ ตำแหน่งที่ v_t มีค่ามากที่สุด และเครื่องหมาย $\circ$ ณ ตำแหน่งที่ v_t มีค่าน้อยสุด
ลงในกระดาดสรุปคำตอบ [0.2 คะแนน]

e) จงแสดงว่าแรงยกลัพธ์ที่กระทำกับมุมเมอแรงไม่ขึ้นกับมุม θ และมีขนาดเท่ากับ
$$F_{\text{total}} = \rho C_L \beta \ell^2 (\alpha_1 \omega^2 \ell^2 + \alpha_2 \omega v \ell + \alpha_3 v^2)$$

พร้อมระบุค่าคงที่ α_1 , α_2 และ α_3 ในสมการ [2.2 คะแนน]

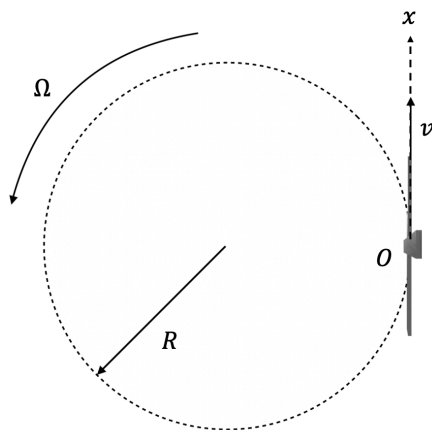
f) จงแสดงว่าทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับมุมเมอแรงรอบจุดศูนย์กลางมวล O มีขนาดเท่ากับ
$$\tau_{\text{total}} = \rho C_L \beta \ell^3 (\lambda_1 \omega^2 \ell^2 + \lambda_2 \omega v \ell + \lambda_3 v^2)$$

พร้อมระบุค่าคงที่ λ_1 , λ_2 และ λ_3 ในสมการ [2.5 คะแนน]

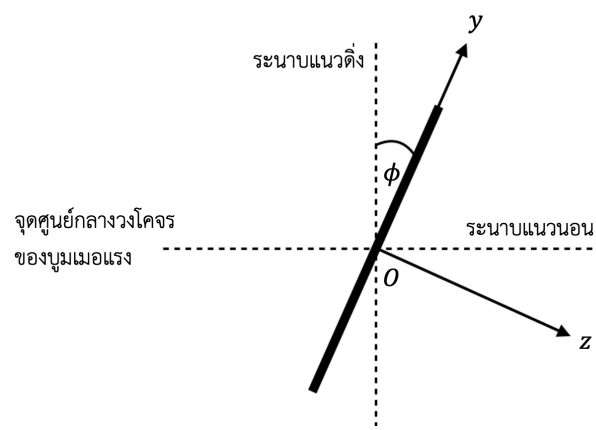
ตอนที่ 3 รัศมีวงโคจรของบูมเมอแรง

พิจารณาการเคลื่อนที่ของบูมเมอแรง ดังแสดงในรูปที่ 3 ซึ่งประกอบด้วย (ก) มุมมองจากด้านบนซึ่งแสดงวิถีการเลี้ยวโค้งเป็นวงกลมรัศมี R ของบูมเมอแรงด้วยความเร็วเชิงมุมการโคจรที่มีขนาดเท่ากับ Ω และ (ข) มุมมองจากด้านหลังของบูมเมอแรงซึ่งแสดงระนาบของบูมเมอแรงที่เอียงทำมุม ϕ กับระนาบแนวดิ่ง

สมมติให้การบินอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady-state flight) โดยบูมเมอแรงเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวระดับอย่างสมบูรณ์แบบโดยไม่เปลี่ยนระดับความสูง และมีค่า v ω และ R คงที่ตลอดการโคจร



(ก) มุมมองจากด้านบน



(ข) มุมมองจากด้านหลัง

รูปที่ 3 แผนภาพ (ก) แสดงมุมมองจากด้านบนซึ่งแสดงวิถีการเลี้ยวโค้งเป็นวงกลมรัศมี R แผนภาพ (ข) แสดงมุมมองจากด้านหลังของบูมเมอแรงซึ่งแสดงระนาบของบูมเมอแรงที่เอียงทำมุม ϕ กับแนวดิ่ง

g) จงวาดลูกศรเพื่อแสดงทิศทางของเวกเตอร์ต่อไปนี้ :

1. โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ และ 2. ทอร์กลัพธ์รอบจุดศูนย์กลางมวล $\vec{\tau}_{\text{total}}$

ให้วาดลงในกระดาษสรุปคำตอบ

[0.2 คะแนน]

h) จงหาสมการของ Ω ในพจน์ของตัวแปร v M ℓ β ρ C_L และ ϕ

[1.0 คะแนน]

i) จงหาสมการของ R ในพจน์ของตัวแปร M ℓ β ρ C_L และ ϕ

[0.4 คะแนน]

j) หากนักเรียนขว้างบูมเมอแรงให้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นที่มีขนาด v เพิ่มขึ้น รัศมีของวงโคจรจะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ เพราะเหตุใด

[0.9 คะแนน]