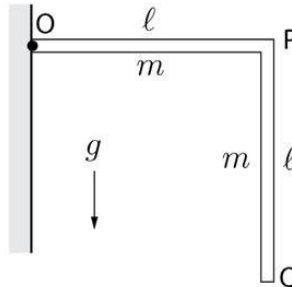


ข้อที่ 1

[11 คะแนน]

a.) SOLUTION



ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุด O ของไม้ฉาก OPQ หาได้จาก

$$\begin{aligned}
 I_O &= I_{OP} + I_{PQ} = (mr_{cm,OP}^2 + I_{cm,OP}) + (mr_{cm,PQ}^2 + I_{cm,PQ}) \\
 &= \left[m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 \right] + \left[m \left(\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \ell^2 \right) + \frac{1}{12} m \ell^2 \right] \\
 &= \frac{5}{3} m \ell^2
 \end{aligned}$$

ค่าทอร์ควรรอบจุด O มาจากน้ำหนักของด้าน OP และ PQ ซึ่งมีค่าเป็น

$$\Sigma \vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm,OP} \times m \vec{g} + \vec{r}_{cm,PQ} \times m \vec{g} = \left(\frac{mg\ell}{2} + mgl \right) (-\hat{k}) = \frac{3mg\ell}{2} (-\hat{k})$$

โดยที่ทิศ $(-\hat{k})$ คือทิศพุ่งเข้าหากระดาษ (ตามเข็มนาฬิกา) ดังนั้นค่าความเร่งเชิงมุมของไม้ฉากคือ

$$\begin{aligned}
 \Sigma \vec{\tau}_{ext} &= I_O \vec{\alpha} \\
 \vec{\alpha} &= \frac{\left(\frac{3mg\ell}{2} \right) (-\hat{k})}{\frac{5}{3} m \ell^2} = \frac{9g}{10\ell} (-\hat{k})
 \end{aligned}$$

b.) SOLUTION

ขนาดของความเร่งของจุด Q หาได้จาก $a_Q = \alpha r_{OQ}$ โดยที่ $\vec{r}_{OQ} = \ell \hat{i} - \ell \hat{j}$ คือเวกเตอร์จากจุด O ไป Q

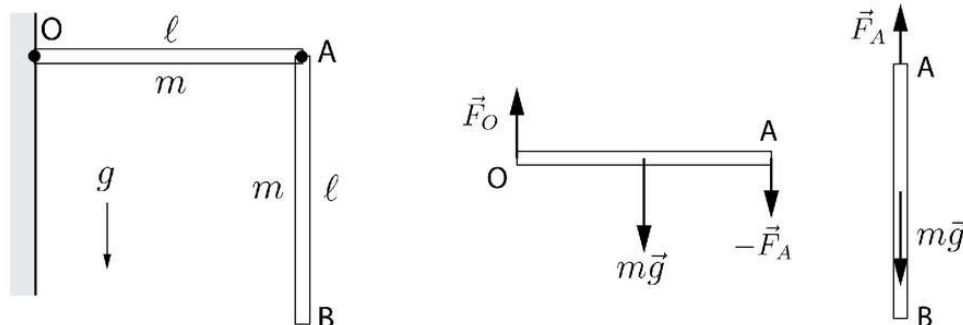
ขนาดของ $\vec{r}_{OQ}$ คือ $r_{OQ} = (\ell^2 + \ell^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \ell$ ดังนั้น

$$a_Q = \frac{9\sqrt{2}g}{10}$$

โดยมีทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{r}_{OQ}$ มีทิศชี้ลง ซึ่งคือ $\hat{a}_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{i} - \hat{j})$

c.) SOLUTION

เชือกที่ยึดแท่งไม้ AB อยู่ในแนวตั้งและแท่งไม้ AB อยู่ในสมมุติ ดังนั้นแรงที่กำกับแท่ง AB ที่จุด A ต้องอยู่ในแนวตั้งเท่านั้นเพื่อให้ความเร่งในแนวนอนเป็นศูนย์ ดังนั้นทันทีที่ตัดเชือก แรงในแนวนอนที่กระทำต่อแท่ง AB ที่จุด A มีค่าเป็นศูนย์ด้วย free body diagram ของแท่ง OA และ AB เป็นไปตามรูป



เนื่องจากแรง $\vec{F}_A$ และ $m\vec{g}$ ชี้ผ่านจุด cm ของแท่ง AB ทำให้ทอร์ครอบจุด cm ของแท่ง AB เป็นศูนย์ ดังนั้น ความเร่งเชิงมุมของแท่ง AB จึงเป็นศูนย์ด้วย $\alpha_{AB} = 0$

ความเร่งเชิงมุมของแท่ง OA หาได้จาก

$$\Sigma \vec{\tau}_{ext} = I_O \vec{\alpha}_{OA} \rightarrow F_A \ell + \frac{mg\ell}{2} = \frac{1}{3} m \ell^2 \alpha_{OA} \quad (c.1)$$

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cm} \rightarrow mg - F_A = m a_{cm,AB} \quad (c.2)$$

$$a_{cm,AB} = \alpha_{OA} \ell \quad (c.3)$$

แก้สมการจะได้ $\alpha_{OA} = 9g/8\ell$ หาคตามเข็มนาฬิกา

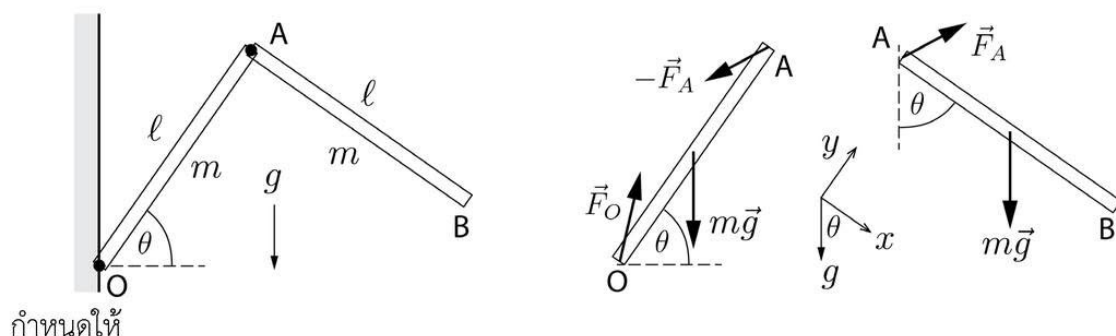
d.) SOLUTION

เนื่องจากความเร่งเชิงมุมของ AB เป็นศูนย์ตอนเริ่มต้น ความเร่งของแท่งไม้ AB ทั้งแท่งจึงมีค่าเท่ากับความเร็วที่จุด A ของแท่ง OA ดังนั้นความเร่งที่จุด B มีค่าเป็น

$$a_B = \alpha_{OA} \ell = \left(\frac{9g}{8\ell} \right) \ell = \frac{9g}{8}$$

โดยมีทิศชี้ลง

e.) SOLUTION



กำหนดให้

- แกน x ชนนานไปกับ AB และแกน y ชนนานไปกับ OA
- $\alpha_{OA} \hat{k}$ คือความเร่งเชิงมุมของแท่ง OA
- $\alpha_{AB} \hat{k}$ คือเร่งเชิงมุมของแท่ง AB
- $\vec{a}_{OA}$ คือความเร่งของจุด cm ของแท่ง OA เทียบกับจุด O

- $\vec{a}_{AB}$ คือความเร่งของจุด cm ของแท่ง AB เทียบกับจุด O
- $\vec{F}_A$ คือแรงที่กระทำต่อแท่ง AB ที่จุด A
- $\vec{F}_O$ คือแรงที่กระทำต่อแท่ง OA ที่จุด O

เราสามารถวาด free body diagram ของแท่งไม้ OA และ AB ได้ดังรูปด้านบน

จาก $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm}$ จะได้ว่า สำหรับแท่ง AB

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a}_{AB} \quad (e.1)$$

สำหรับแท่ง OA

$$m\vec{g} - \vec{F}_A + \vec{F}_O = m\vec{a}_{OA} \quad (e.2)$$

จาก $\Sigma \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$ จะได้ว่า สำหรับแท่ง AB เราต้องคิดทอร์กรอบจุด cm เพราะทุกจุดบนแท่ง AB มีความเร่ง

$$\frac{\ell}{2}(-\hat{i}) \times \vec{F}_A = I_{cm,AB} \alpha_{AB} \hat{k} \quad (e.3)$$

สำหรับแท่ง OA เราคิดทอร์กรอบจุด O จะได้ว่า

$$\frac{\ell}{2}\hat{j} \times m\vec{g} + \ell\hat{j} \times (-\vec{F}_A) = I_{O,OA} \alpha_{OA} \hat{k} \quad (e.4)$$

โดยที่ $I_{cm,AB} = \frac{1}{12}m\ell^2$ และ $I_{O,OA} = \frac{1}{3}m\ell^2$

เนื่องจากแท่ง OA หมุนรอบจุด O ที่อยู่นิ่ง จะได้ว่า $\vec{a}_{OA}$ มีค่าเป็น

$$\vec{a}_{OA} = \frac{\ell}{2}\alpha_{OA}(-\hat{i}) \quad (e.5)$$

ส่วนความเร่ง $\vec{a}_{AB}$ นั้นหาได้จากความเร่งของจุด cm ของแท่ง AB เทียบกับจุด A บวกกับความเร่งของจุด A เทียบกับจุด O จะได้ว่า

$$\vec{a}_{AB} = \frac{\ell}{2}\alpha_{AB}\hat{j} + \ell\alpha_{OA}(-\hat{i}) \quad (e.6)$$

จะเห็นว่าตอนนี้มี 6 สมการและ 6 ตัวแปร ได้แก่ $\alpha_{AB}, \alpha_{OA}, \vec{a}_{AB}, \vec{a}_{OA}, \vec{F}_A, \vec{F}_O$ ดังนั้นเราสามารถแก้หาค่าตัวแปรต่างๆได้

สำหรับการหาค่า α_{AB}, α_{OA} เราใช้สมการ e.1, e.3, e.4 และ e.6 ดังต่อไปนี้

แทน e.6 ลงใน e.1 จะได้

$$\vec{F}_A = m\left(\frac{\ell}{2}\alpha_{AB}\hat{j} + \ell\alpha_{OA}(-\hat{i})\right) - m\vec{g} \quad (e.7)$$

แทน e.7 ลงใน e.3 จะได้

$$I_{cm,AB}\alpha_{AB}\hat{k} = \frac{\ell}{2}(-\hat{i}) \times \left[m\left(\frac{\ell}{2}\alpha_{AB}\hat{j} + \ell\alpha_{OA}(-\hat{i})\right) - m\vec{g}\right]$$

$$\left(I_{cm,AB} + \frac{m\ell^2}{4}\right)\alpha_{AB}\hat{k} = \frac{m\ell}{2}(\hat{i} \times \vec{g}) = \frac{m\ell}{2}(-g \sin \theta \hat{k})$$

$$\alpha_{AB} = -\frac{3g}{2\ell} \sin \theta$$

แทน e.7 ลงใน e.4 จะได้

$$\begin{aligned} I_{O,OA} \alpha_{OA} \hat{k} &= \frac{\ell}{2} \hat{j} \times m \vec{g} + \ell \hat{j} \times \left[m \vec{g} - m \left(\frac{\ell}{2} \alpha_{AB} \hat{j} + \ell \alpha_{OA} (-\hat{i}) \right) \right] \\ (I_{O,OA} + m\ell^2) \alpha_{OA} \hat{k} &= \frac{3m\ell}{2} (\hat{j} \times \vec{g}) = \frac{3m\ell}{2} (-g \cos \theta) \\ \alpha_{OA} &= -\frac{9g}{8\ell} \cos \theta \end{aligned}$$

α_{AB} และ α_{OA} มีค่าเป็นลบแสดงว่าแท่งไม้ AB และ OA มีความเร่งเชิงมุมทิศตามเข็มนาฬิกา

f.) SOLUTION

ตำแหน่ง cm ของแท่งไม้ OA คือ $(x_{cm}, y_{cm})_{OA} = (\frac{\ell}{2} \cos \theta, \frac{\ell}{2} \sin \theta)$

ตำแหน่ง cm ของแท่งไม้ AB คือ $(x_{cm}, y_{cm})_{AB} = (\frac{3\ell}{2} \cos \theta, \frac{\ell}{2} \sin \theta)$

ดังนั้นตำแหน่ง cm ของระบบแท่งไม้ OAB คือ

$$(x_{cm}, y_{cm}) = \frac{m(x_{cm}, y_{cm})_{OA} + m(x_{cm}, y_{cm})_{AB}}{2m} = (\ell \cos \theta, \frac{\ell}{2} \sin \theta)$$

g.) SOLUTION

พลังงานจลน์ของแท่ง OA มาจากการหมุนรอบจุด O ดังนั้น

$$E_{k,OA} = \frac{1}{2} I_{OA} \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m \ell^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2$$

พลังงานจลน์ของแท่ง AB มาจากการเคลื่อนที่ของจุด cm และการหมุนรอบจุด cm

ความเร็วของจุด cm หาได้จาก

$$(v_{x,cm}, v_{y,cm})_{AB} = \frac{d}{dt} (x_{cm}, y_{cm})_{AB} = \left(\frac{3\ell\omega}{2} \sin \theta, -\frac{\ell\omega}{2} \cos \theta \right)$$

โดยที่เราได้ใช้ $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$ เพราะมุม θ มีขนาดเล็กลงเมื่อเวลาผ่านไป

ขนาดของความเร็วของจุด cm ของแท่งไม้ AB มีค่าเป็น

$$v_{cm,AB}^2 = (9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \frac{\ell^2 \omega^2}{4} = (1 + 8 \sin^2 \theta) \frac{\ell^2 \omega^2}{4}$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ของแท่ง AB คือ

$$\begin{aligned} E_{k,AB} &= \frac{1}{2} m v_{cm,AB}^2 + \frac{1}{2} I_{cm,AB} \omega^2 \\ &= \frac{1}{8} m \ell^2 \omega^2 (1 + 8 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m \ell^2 \right) \omega^2 = \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \theta \right) m \ell^2 \omega^2 \end{aligned}$$

พลังงานจลน์ของระบบแท่งไม้ OAB มีค่าเป็น

$$E_k = E_{k,OA} + E_{k,AB} = \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) m \ell^2 \omega^2$$

h.) SOLUTION

วิธีที่ 1 เราสามารถหาโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบได้จากผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของแท่ง OA และ AB โมเมนตัมเชิงมุมของแท่ง OA มาจากการหมุนรวมจุด O และ เนื่องจาก B กำลังไถลออกจากผนัง แท่ง OA จึงหมุนตามเข็มนาฬิกา ความเร็วเชิงมุมจึงมีทิศ $-\hat{k}$ เราจึงได้ว่า

จะได้ว่า

$$\vec{L}_{OA} = I_O \vec{\omega}_{OA} = \frac{1}{3} m \ell^2 \omega (-\hat{k})$$

โมเมนตัมเชิงมุมของแท่ง AB มาจากการเคลื่อนที่ของจุด CM และการหมุนรอบจุด CM ของแท่ง AB

$$\vec{L}_{AB} = \vec{r}_{cm,AB} \times m \vec{v}_{cm,AB} + I_{cm,AB} \vec{\omega}_{AB}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm,AB} &= \frac{3\ell}{2} \cos \theta \hat{i} + \frac{\ell}{2} \sin \theta \hat{j} \\ \vec{v}_{cm,AB} &= \frac{d}{dt} \vec{r}_{cm,AB} = \frac{3\ell\omega}{2} \sin \theta \hat{i} - \frac{\ell\omega}{2} \cos \theta \hat{j} \\ \vec{\omega}_{AB} &= \omega \hat{k}, \quad I_{cm,AB} = \frac{1}{12} m \ell^2 \end{aligned}$$

$\vec{\omega}_{AB}$ มีทิศบวก เพราะกำลังหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา แทนค่าจะได้ว่า

$$\vec{L}_{AB} = -\frac{3}{4} m \ell^2 \omega \hat{k} + \frac{1}{12} m \ell^2 \omega \hat{k} = -\frac{2}{3} m \ell^2 \omega \hat{k}$$

ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมของระบบแท่งไม้ OAB มีค่าเป็น

$$\vec{L}_{OAB} = \vec{L}_{OA} + \vec{L}_{AB} = -m \ell^2 \omega \hat{k} \quad (h.1)$$

วิธีที่ 2 เราสามารถพิจารณาระบบแท่งไม้ OAB เป็น 1 ระบบที่มีมวล $2m$ จะได้ว่า

$$\vec{L}_{OAB} = \vec{r}_{cm,OAB} \times (2m) \vec{v}_{cm,OAB} + \vec{L}'_{OA} + \vec{L}'_{AB}$$

โดยที่ $\vec{L}'_{OA}$ และ $\vec{L}'_{AB}$ คือโมเมนตัมเชิงมุมของแท่ง OA และ AB เทียบกับจุด cm ของระบบแท่งไม้ OAB จุด cm ของ OA และ AB เมื่อเทียบกับจุด cm ของ OAB มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{cm,OA} &= \vec{r}_{cm,OA} - \vec{r}_{cm,OAB} = -\frac{\ell}{2} \cos \theta \hat{i} \\ \vec{r}'_{cm,AB} &= \vec{r}_{cm,AB} - \vec{r}_{cm,OAB} = \frac{\ell}{2} \cos \theta \hat{i} \end{aligned}$$

และค่าความเร็วของจุด cm ของ OA และ AB ก็มีทิศในแนวแกน x เช่นกัน ดังนั้นค่า

$$\vec{r}'_{cm,OA} \times m \vec{v}'_{cm,OA} = \vec{r}'_{cm,AB} \times m \vec{v}'_{cm,AB} = 0$$

และเนื่องจากแท่ง OA และ AB หมุนในทิศตรงข้ามกัน ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเนื่องจากการหมุนรอบจุด cm ของแต่ละแท่งหักล้างกันพอดี เราจึงได้ว่า

$$\vec{L}'_{OA} + \vec{L}'_{AB} = 0$$

และค่าโมเมนตัมเชิงมุมของระบบมีค่าเป็น

$$\vec{L}_{OAB} = \vec{r}_{cm,OAB} \times (2m) \vec{v}_{cm,OAB}$$

$$= \left(\ell \cos \theta \hat{i} + \frac{\ell}{2} \sin \theta \hat{j} \right) \times (2m) \left(\ell \omega \sin \theta \hat{i} - \frac{\ell \omega}{2} \cos \theta \hat{j} \right)$$

$$= -m\ell^2 \omega \hat{k}$$

i.) SOLUTION

พลังงานตอนเริ่มต้นมาจากพลังงานศักย์

$$E_i = mg \frac{\ell}{2} + mg \frac{\ell}{2} = mg\ell$$

พลังงานตอนที่ A กำลังจะแตะพื้น ($\theta = 0^\circ$) มาจากพลังงานจลน์

$$E_f = \left(\frac{1}{3} + \sin^2 0 \right) m\ell^2 \omega^2 = \frac{1}{3} m\ell^2 \omega^2$$

จากกฎอนุรักษ์พลังงาน $E_i = E_f$ จะได้ว่า

$$mg\ell = \frac{1}{3} m\ell^2 \omega^2 \rightarrow \omega = \left(\frac{3g}{\ell} \right)^{1/2}$$

j.) SOLUTION

พิจารณา OAB เป็นหนึ่งระบบ ดังนั้นทอร์คเนื่องจากแรงภายนอกรอบจุด O มีค่าเป็น

$$\Sigma \vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm,OA} \times m\vec{g} + \vec{r}_{cm,AB} \times m\vec{g} + \vec{l}_{OB} \times \vec{F}_B$$

$$= mg \left(\frac{\ell}{2} \right) \cos \theta (-\hat{k}) + mg \left(\frac{3\ell}{2} \right) \cos \theta (-\hat{k}) + F_B (2\ell) \cos \theta (\hat{k})$$

สำหรับ $\theta = 0$,

$$\Sigma \vec{\tau}_{ext} = \left[-mg \left(\frac{\ell}{2} \right) - mg \left(\frac{3\ell}{2} \right) + F_B (2\ell) \right] \hat{k} = (F_B - mg) 2\ell \hat{k}$$

จาก $\Sigma \vec{\tau}_{ext} = d\vec{L}/dt$ และใช้ $\vec{L}_{OAB} = -m\ell^2 \omega \hat{k}$ จากสมการ h.1 เราจะได้ว่า

$$(F_B - mg) 2\ell = -m\ell^2 \alpha \quad (j.1)$$

โดยที่ $\alpha = d\omega/dt$

เราสามารถหาค่า α ได้จากการหาอนุพันธ์ของความเร็วเชิงมุมที่มุมต่างๆที่ได้มาจากกฎอนุรักษ์พลังงาน

$$E_i = E_f \rightarrow mg\ell = mg\ell \sin \theta + \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) m\ell^2 \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \left(\frac{3g}{\ell} \right)$$

หาอนุพันธ์ของ ω^2 เทียบกับเวลาจะได้

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = \left[\frac{(-\cos \theta)(1 + 3 \sin^2 \theta) - (1 - \sin \theta)(6 \sin \theta \cos \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \right] \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{3g}{\ell} \right)$$

จาก $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$ ทำให้ได้

$$\frac{d\omega}{dt} = \left[\frac{(\cos \theta)(1 + 3 \sin^2 \theta) + (1 - \sin \theta)(6 \sin \theta \cos \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{3g}{2\ell} \right)$$

$$\alpha = \left[\frac{(1 + 6 \sin \theta - 3 \sin^2 \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \right] \cos \theta \left(\frac{3g}{2\ell} \right)$$

เมื่อ $\theta = 0$ จะได้

$$\omega = \left(\frac{3g}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2\ell} \quad (j.2)$$

แทนค่า α ลงในสมการ j.1 จะได้

$$F_B = mg - \frac{m\ell}{2} \left(\frac{3g}{2\ell} \right) = \frac{mg}{4} \text{ ในทิศชี้ขึ้น}$$

k.) SOLUTION

พิจารณา OAB เป็นหนึ่งระบบและใช้

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = (2m) \vec{a}_{cm,OAB} \quad (k.1)$$

แรงภายนอกที่กระทำกับ OAB คือ

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_O + m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_B \quad (k.2)$$

ส่วนความเร่งของจุด cm ของ OAB หาได้จาก

$$\vec{r}_{cm,OAB} = \ell \cos \theta \hat{i} + \frac{\ell}{2} \sin \theta \hat{j}$$

$$\vec{v}_{cm,OAB} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{cm,OAB} = \ell \omega \sin \theta \hat{i} - \frac{\ell \omega}{2} \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{a}_{cm,OAB} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{cm,OAB} = (\ell \alpha \sin \theta - \ell \omega^2 \cos \theta) \hat{i} - \left(\frac{\ell \alpha}{2} \cos \theta + \frac{\ell \omega^2}{2} \sin \theta \right) \hat{j}$$

แทนค่า $\theta = 0, \omega = \left(\frac{3g}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}}, \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2\ell}$ จะได้

$$\vec{a}_{cm,OAB} = -3g\hat{i} - \frac{3g}{4}\hat{j} \quad (k.3)$$

แทนค่า k.2 และ k.3 ลงในสมการ k.1 จะได้

$$\vec{F}_O + m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_B = 2m \left(-3g\hat{i} - \frac{3g}{4}\hat{j} \right)$$

$$\vec{F}_O - 2mg\hat{j} + \frac{mg}{4}\hat{j} = 2m \left(-3g\hat{i} - \frac{3g}{4}\hat{j} \right)$$

$$\vec{F}_O = -6mg\hat{i} + \frac{mg}{4}\hat{j}$$

ข้อที่ 2 Stirling Engine & A Toy Boat

[8 คะแนน]

ตอนที่ 1 Stirling Engine

a) SOLUTION

ใช้สมการสถานะ $PV = nRT$ ช่วยในการคำนวณ จะได้

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_H}{bV_0} = \frac{P_0}{b}$$

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_C}{bV_0} = \frac{P_0}{b} \frac{T_C}{T_H}$$

$$P_C = \frac{nRT_D}{V_D} = \frac{nRT_C}{V_0} = P_0 \frac{T_C}{T_H}$$

b) SOLUTION

กฎข้อที่ 1 ของอุณหพลศาสตร์ $\Delta U = Q - W$

(1) เส้นทาง A $\rightarrow$ B

$$\text{งาน } W = \int_{V_0}^{bV_0} P dV = \int_{V_0}^{bV_0} \frac{nRT_H}{V} dV = +nRT_H \ln b$$

อุณหภูมิคงตัว $\Delta U = 0$

จะได้ $Q = W = +nRT_H \ln b$ ดูดความร้อน

(2) เส้นทาง B $\rightarrow$ C

งาน $W = 0$ เพราะไม่มีการเปลี่ยนปริมาตร

เปลี่ยนอุณหภูมิ $Q = -nC_V(T_H - T_C)$ คายความร้อน

จะได้ $\Delta U = Q = -nC_V(T_H - T_C)$ พลังงานภายในลดลง

(3) เส้นทาง C $\rightarrow$ D

$$\text{งาน } W = \int_{bV_0}^{V_0} P dV = \int_{bV_0}^{V_0} \frac{nRT_C}{V} dV = -nRT_C \ln b$$

อุณหภูมิคงตัว $\Delta U = 0$

จะได้ $Q = W = -nRT_C \ln b$ คายความร้อน

(4) เส้นทาง D $\rightarrow$ A

งาน $W = 0$ เพราะไม่มีการเปลี่ยนปริมาตร

เปลี่ยนอุณหภูมิ $Q = +nC_V(T_H - T_C)$ ดูดความร้อน

จะได้ $\Delta U = Q = +nC_V(T_H - T_C)$ พลังงานภายในเพิ่มขึ้น

เส้นทาง	ΔU	Q	W
A $\rightarrow$ B	0	$+nRT_H \ln b$	$+nRT_H \ln b$
B $\rightarrow$ C	$-nC_V(T_H - T_C)$	$-nC_V(T_H - T_C)$	0
C $\rightarrow$ D	0	$-nRT_C \ln b$	$-nRT_C \ln b$
D $\rightarrow$ A	$+nC_V(T_H - T_C)$	$+nC_V(T_H - T_C)$	0

c) SOLUTION

$$\text{งานที่ทำ } \Sigma W_i = +nRT_H \ln b - nRT_C \ln b = nR(T_H - T_C) \ln b$$

$$\text{ความร้อนที่ได้รับทั้งหมด} = +nRT_H \ln b + nC_V(T_H - T_C)$$

$$\text{ประสิทธิภาพ } \eta = \frac{\text{งานที่ทำ}}{\text{ความร้อนที่ได้รับทั้งหมด}}$$

$$\eta = \frac{nR(T_H - T_C) \ln b}{nRT_H \ln b + nC_V(T_H - T_C)} = \frac{R(T_H - T_C) \ln b}{RT_H \ln b + C_V(T_H - T_C)}$$

d) SOLUTION

$$\text{ความร้อนที่ทิ้งไปในขั้นตอน } B \rightarrow C \text{ คือ } -nC_V(T_H - T_C)$$

ซึ่งหากนำมากลับมาใส่ในขั้นตอน $D \rightarrow A$ จะได้ว่าความร้อนที่ได้รับจากแหล่งให้ความร้อนภายนอกจะมีเพียง

$$\text{ความร้อนที่ได้รับทั้งหมด} = +nRT_H \ln b$$

$$\text{ประสิทธิภาพ } \eta = \frac{nR(T_H - T_C) \ln b}{nRT_H \ln b} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

(ลักษณะเดียวกับ Carnot engine เป็น reversible process ทั้งหมด)

ตอนที่ 2. A Toy Boat

e) SOLUTION

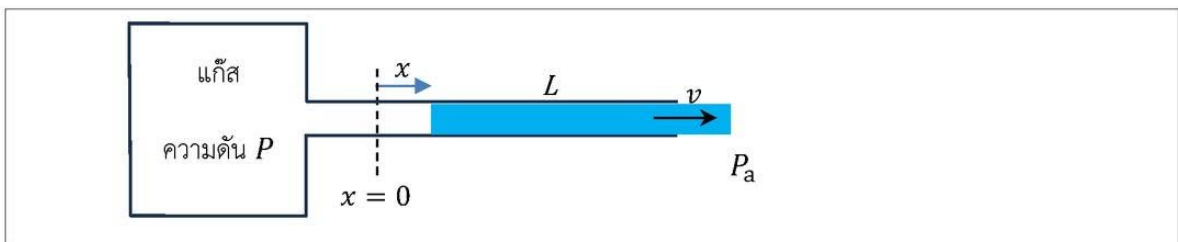
จาก $V(x) = V_a + \pi r^2 x$

สามารถประมาณเป็นกระบวนการอุณหภูมิคงตัว เนื่องจากน้ำเดือดอุณหภูมิจะใกล้เคียง 100°C (และไม่ใช้กระบวนการปริมาตรคงตัว, ไม่ใช่กระบวนการความดันคงตัว และแก๊สได้รับความร้อนภายนอกตลอดเวลา)

ภายใต้อุณหภูมิคงตัว $P(x) = \frac{P_a V_a}{V(x)} = \frac{P_a V_a}{V_a + \pi r^2 x} = P_a \left(1 + \frac{\pi r^2 x}{V_a}\right)^{-1}$

ใช้การประมาณ $(1+x)^n \approx 1+nx$ เมื่อ $|x| \ll 1$

จะได้ $P(x) \approx P_a - P_a \frac{\pi r^2 x}{V_a}$



พิจารณาแรงลัพธ์ที่กระทำกับลำน้ำมวล m

$$\frac{md^2x}{dt^2} = (P(x) - P_a)\pi r^2 = -\frac{\pi r^2 P_a}{V_a} \pi r^2 x$$

แทนค่า $m = \rho \pi r^2 L$ จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi r^2 P_a}{\rho L V_a} x$$

ซึ่งเป็นสมการ SHM ที่มี $\omega^2 = \frac{\pi r^2 P_a}{\rho L V_a}$

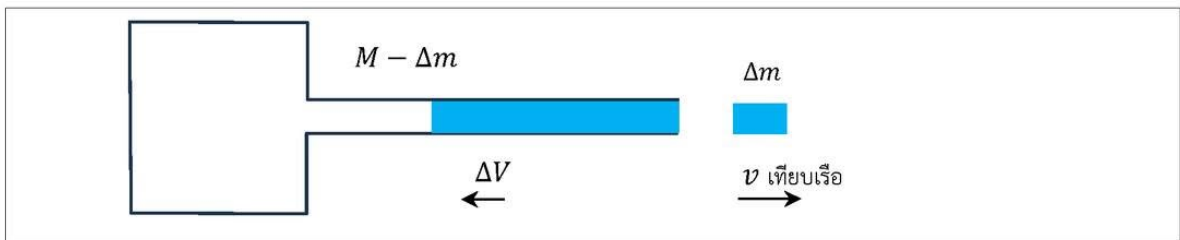
ดังนั้นเวลาที่ใช้พ่นน้ำเท่ากับครึ่งหนึ่งของคาบ $\Delta t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{\rho L V_a}{\pi r^2 P_a}}$

f) SOLUTION

เนื่องจากเป็น SHM, $v_{\max} = \omega x_{\max} = \sqrt{\frac{\pi r^2 P_a}{\rho L V_a}} x_{\max}$

ระบบประกอบด้วยเรือและน้ำที่อยู่ภายในท่อ การสร้างแรงขับเคลื่อน จะคล้ายกับกับกรณีจรวดเผาไหม้เชื้อเพลิงทิ้งไป อัตราการพ่นโมเมนตัมทิ้งไว้ข้างหลัง จะเท่ากับแรงที่ผลักดันไปข้างหน้า

ให้ระบบมีมวล M (เรือ+น้ำในท่อ) เริ่มต้น $V \approx 0$ แล้วพ่นน้ำมวล Δm ทิ้งไปด้วยความเร็ว v เทียบเรือไปทางข้างหลัง



คำนวณจากแรงดลของอัตราการปล่อยโมเมนตัมไปข้างหลัง $\frac{\Delta m}{\Delta t} v = \rho \pi r^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v = \rho \pi r^2 v^2$

หรือพิจารณาอัตราการไหลของโมเมนตัมของของเหลว

หรือจากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม $M \cdot \Delta V = \Delta m \cdot v$

(หรือเริ่มจาก $MV = (M - \Delta m)(V + \Delta V) + \Delta m(V - v)$ แล้วจัดรูป)

ดังนั้นแรงขับเคลื่อน $F = M \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} v = \rho \pi r^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v = \rho \pi r^2 v^2$

แรงขับเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ $F_{\max} = \rho \pi r^2 v_{\max}^2$

(สำหรับการคิดแรงจากลำน้ำทั้งความยาว L โดยหาจากความเร่งสูงสุดของ SHM ให้ผู้ตรวจพิจารณาให้คะแนน แต่ตอนหาค่าเฉลี่ยของแรงในข้อย่อยถัดไปจะต้องพิจารณาเฉพาะน้ำส่วนที่พ่นทิ้งไปเท่านั้น)

g) SOLUTION

$$\text{แทนค่าหาคาบ } T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho L V_a}{\pi r^2 P_a}} = 0.249 \text{ s}$$

(สอดคล้องกับความถี่ของเรือป๊อปปี้ทั่วไป 1 – 10 Hz)

$$\text{ดังนั้น } \Delta t = \frac{T}{2} = 0.124 \text{ s}$$

$$\text{แทนค่า } v_{\max} = \sqrt{\frac{\pi r^2 P_a}{\rho L V_a}} x_{\max} = 0.25 \text{ m/s}$$

h) SOLUTION

จาก $F(t) = \rho \pi r^2 v^2 = \rho \pi r^2 \omega^2 x^2$ และให้ $x = x_{\max} \sin \omega t$

จะได้ $F(t) = \rho \pi r^2 \omega^2 x_{\max}^2 \sin^2 \omega t$

ดังนั้นในช่วงการพ่นน้ำจึงมีแรงเฉลี่ย $\langle F \rangle = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 \omega^2 x_{\max}^2$ เนื่องจาก $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

ช่วงดูดน้ำใช้เวลาเท่ากันแต่ไม่มีแรงกระทำ

$$\text{ดังนั้น } \langle F \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho \pi r^2 \omega^2 x_{\max}^2 = \frac{1}{4} (\pi r^2)^2 \frac{P_a}{L V_a} x_{\max}^2$$

แทนค่าได้ $\langle F \rangle = 4.9 \times 10^{-5} \text{ N}$ (หากท่อโตขึ้น 2 เท่า แรงจะเพิ่มขึ้น 16 เท่า)

i) SOLUTION

ลำน้ำมวลที่กำลังเคลื่อนที่ จะมีความหนาแน่นพลังงานจลน์ $\frac{1}{2} \rho v^2$

อัตราที่พลังงานจลน์ไหลออกจากท่อเท่ากับ

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho v^2 \times \pi r^2 \frac{v \Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho v^3 \pi r^2$$

ประสิทธิภาพเฉลี่ย

$$\frac{\langle \frac{\Delta W}{\Delta t} \rangle}{\dot{Q}} = \frac{1}{\dot{Q}} \times \frac{1}{2} \rho v_{\max}^3 \pi r^2 \times \frac{4}{3\pi} \times \frac{1}{2}$$

แพคเตอร์ $\frac{1}{2}$ ตัวสุดท้ายมาจากการรวมช่วงการดูดน้ำกลับ ซึ่งไม่มีแรงขับเคลื่อน

$$\text{ดังนั้น } \frac{\langle \frac{\Delta W}{\Delta t} \rangle}{\dot{Q}} = \frac{1}{\dot{Q}} \times \frac{1}{3} \rho v_{\max}^3 r^2 = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H}$$

แทนตัวเลขได้ประสิทธิภาพประมาณ $1.7 \times 10^{-6} \%$

$$\text{แทนค่าเป็นตัวเลขได้ } \Delta T = \frac{1}{\dot{Q}} \times \frac{1}{3} \rho v^3 r^2 T_H = 0.0065 \text{ K}$$

ข้อที่ 3. การทำความร้อนด้วยการเหนี่ยวนำแม่เหล็ก

[11 คะแนน]

ตอนที่ 1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าก่อนใส่แท่งทองแดง

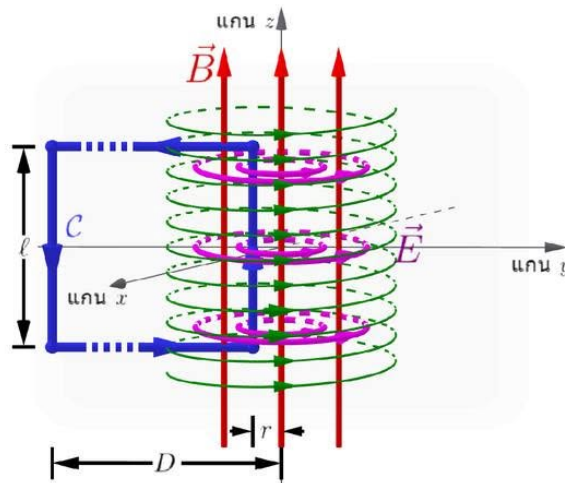
[3.5 คะแนน]

a) สร้างวิถีปิด C ดังรูปที่ 1 ด้านล่าง เราพิจารณา 2 กรณีดังนี้

- กรณี $0 < r < L$: ปริพันธ์ตามเส้น $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ มีค่าลู่เข้าสู่ $B_z(r, t) \ell$ เมื่อ $D \rightarrow \infty$ โดยกฎของแอมแปร์ เราได้ว่า $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n \ell I(t)$ (ไม่สนใจพจน์ที่มาจากการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า) ดังนั้น $B_z(r, t) = \mu_0 n I(t)$
- กรณี $r > L$: ปริพันธ์ตามเส้น $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ มีค่าลู่เข้าสู่ $B_z(r, t) \ell$ เมื่อ $D \rightarrow \infty$ โดยกฎของแอมแปร์ เราได้ว่า $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ (ไม่สนใจพจน์ที่มาจากการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า) ดังนั้น $B_z(r, t) = 0$

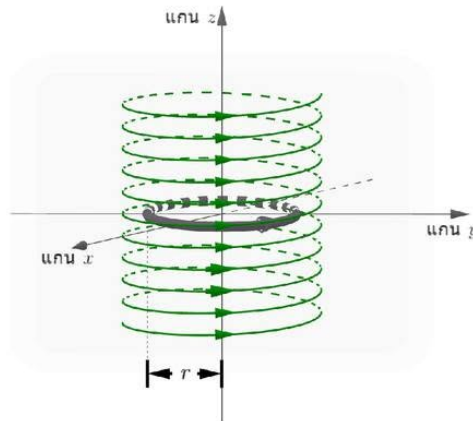
จากทั้งสองกรณี เราสรุปว่า

$$B_z(r, t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t), & 0 < r < L \\ 0, & r > L \end{cases} \quad (1)$$



รูปที่ 1 : วิถีปิด C (ก่อนใส่แท่งทองแดง)

b) เราสามารถหาสนามไฟฟ้าได้โดยใช้กฎของฟาราเดย์ทั้งในรูปแบบปริพันธ์ และในรูปแบบอนุพันธ์ สำหรับการ
ใช้กฎของฟาราเดย์ในรูปแบบปริพันธ์ พิจารณาเส้นโค้งปิด C ในรูปด้านล่าง



รูปที่ 2 : เส้นโค้งปิด C ที่เป็นวงกลมบนระนาบ xy ซึ่งหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ในบริเวณ $0 < r < L$ เราจะได้ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_\phi(r, t)$ ระวังว่า $B_z(r, t) = \mu_0 n I(t)$ ภายในขดลวด ดังนั้น ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ผ่าน C คือ $\Phi_B = \pi r^2 B_z$ โดยกฎการเหนี่ยวนำของฟาราเดย์ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ นั่นคือ $2\pi r E_\phi(r, t) = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B_z) = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 \mu_0 n I(t)) = -\pi \mu_0 n r^2 I'(t)$ เราจึงได้ว่า $E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n r}{2} I'(t)$

ในบริเวณ $r > L$ เนื่องจาก $B_z = 0$ ดังนั้นฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ผ่าน C คือ $\Phi_B = \pi L^2 B_z$ นำไปสู่ $2\pi r E_\phi(r, t) = -\frac{d}{dt}(\pi L^2 B_z) = -\frac{d}{dt}(\pi L^2 \mu_0 n I(t)) = -\pi \mu_0 n L^2 I'(t)$ และ $E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n L^2}{2r} I'(t)$

วิธีที่สอง เราอาจใช้สมการ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2)$$

เมื่อใช้ B_z จากข้อ a) เราจะได้ว่า

- กรณี $0 < r < L$: จาก $B_z(r, t) = \mu_0 n I(t)$ เพราะฉะนั้น $\frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = -\mu_0 n r I'(t)$ เมื่อ $I'(t)$ คืออนุพันธ์ของ $I(t)$ เทียบกับ t ดังนั้น $r E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n r^2}{2} I'(t) + f(t)$ สำหรับบางฟังก์ชัน $f(t)$ เราได้ว่า $E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n r}{2} I'(t) + \frac{f(t)}{r}$ ซึ่งจะมีนิยามเมื่อ $r \rightarrow 0^+$ ได้เฉพาะในกรณีที่ $f(t) = 0$ เสมอ ดังนั้น $E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n r}{2} I'(t)$
- กรณี $r > L$: จาก $B_z(r, t) = 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = 0$ นั่นคือ $r E_\phi(r, t) = g(t)$ สำหรับบางฟังก์ชัน $g(t)$ ซึ่งหมายความว่า $E_\phi(r, t) = \frac{g(t)}{r}$ ดังนั้น $\lim_{r \rightarrow L^+} E_\phi(r, t) = \frac{g(t)}{L}$ เนื่องจาก $\lim_{r \rightarrow L^-} E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n L}{2} I'(t)$ จากกรณีข้างบน และ $E_\phi(r, t)$ ต้องมีความต่อเนื่องที่ $r = L$ เราจึงสรุปว่า $\frac{g(t)}{L} = -\frac{\mu_0 n L}{2} I'(t)$ ซึ่งให้ว่า $g(t) = -\frac{\mu_0 n L^2}{2} I'(t)$ และ $E_\phi(r, t) = -\frac{\mu_0 n L^2}{2r} I'(t)$

c) เราสามารถปรับปรุงค่าสนามแม่เหล็กได้โดยใช้กฎของแอมแปร์-แมกซ์เวลล์ ในที่นี้ เราจะเลือกใช้รูปแบบปริพันธ์ ให้ S แทนพื้นผิวรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ถูกปิดล้อมโดยเส้นโค้งปิด C ในรูปที่ 1 ด้านบน โดยเรากำหนดว่า เวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิว S คือ $\hat{\phi}$ (ซึ่งทำให้ทิศทางของ C สอดคล้องกับกฎมือขวา)

สมมติว่า $0 < r < L$ มีค่าคงที่ เมื่อ $D \rightarrow L^+$ ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ มีค่าเข้าใกล้

$$\ell \int_r^L \left(-\frac{\mu_0 n \xi}{2} I'(t) \right) d\xi = -\frac{\mu_0 n \ell}{4} (L^2 - r^2) I'(t) \quad (3)$$

โดยสมมติฐานที่ว่า $I(t)$ เปลี่ยนแปลงช้าเพียงพอ เราได้จากข้อ a) ว่า $\lim_{D \rightarrow L^+} B_z(D, t) = 0$ ดังนั้น ปริพันธ์ตามเส้น $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ มีค่าเป็น $\ell B_z(r, t)$ เมื่อ $D \rightarrow L^+$ โดยกฎของแอมแปร์ $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n \ell I(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ และสมการ (3) เราจึงสรุปว่า

$$B_z(r, t) = \mu_0 n I(t) - \frac{\mu_0 n}{4c^2} (L^2 - r^2) I''(t) \quad (4)$$

ในทางกลับกัน ถ้า $r \rightarrow L^+$ โดย $D > r > L$ มีค่าคงที่แล้ว ฟลักซ์ไฟฟ้า $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ มีค่าเข้าใกล้

$$\ell \int_L^D \left(-\frac{\mu_0 n L^2}{2\xi} I'(t) \right) d\xi = -\frac{\mu_0 n L^2 \ell}{2} \ln\left(\frac{D}{L}\right) I'(t) \quad (5)$$

ปริพันธ์ตามเส้น $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ มีค่าเป็น $-\ell B_z(D, t)$ โดยกฎของแอมแปร์ $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ เราสรุปว่า $B_z(D, t) = \frac{\mu_0 n L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{D}{L}\right) I''(t)$ หรือ

$$B_z(r, t) = \frac{\mu_0 n L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{r}{L}\right) I''(t)$$

สรุปว่า

$$B_z(r, t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t) - \frac{\mu_0 n}{4c^2} (L^2 - r^2) I''(t), & 0 < r < L \\ \frac{\mu_0 n L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{r}{L}\right) I''(t), & r > L \end{cases} \quad (6)$$

หมายเหตุ : การคำนวณข้างต้นเป็นการประมาณที่ขาดการคำนึงว่า ในความเป็นจริง ขดลวดจะไม่มีควมยาวเป็นอนันต์ ซึ่งจะเห็นได้จากสมการ (ที่จะได้ว่า $\lim_{r \rightarrow \infty} B_z(r, t) \neq 0$ สำหรับ $I''(t) \neq 0$ อนึ่ง การสมมติว่า $\lim_{r \rightarrow L^+} B_z(r, t) = 0$ เป็นการประมาณที่ไม่คำนึงถึงเวลาที่สนามแม่เหล็กใช้ในการเดินทาง ซึ่งเป็นการประมาณที่ดีในกรณีที่กระแสไฟฟ้า $I(t)$ มีการเปลี่ยนแปลงที่ไม่เร็วมาก นอกจากนี้ การปรับปรุงค่าของสนามแม่เหล็กก็จะเหนี่ยวนำให้เกิดการปรับปรุงค่าของสนามไฟฟ้า ซึ่งจะส่งต่อการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวนี้เพิ่มเติมสลับไปสลับมาระหว่างสนามทั้งสอง เมื่อนำปฏิสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้ามาพิจารณา สมการที่ถูกต้องในการอธิบายสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้างกล่าวคือสมการคลื่น (wave equation) สำหรับระบบพิกัดทรงกระบอกที่มีความสมมาตรรอบแกน z ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} B_z \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z \text{ และ } \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_\phi$$

สำหรับ $0 < r < L$ และ $r > L$ ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย Error! Reference source not found. สามารถเขียนได้ในรูปผลบวก (อาจเป็นผลบวกอนันต์) ของฟังก์ชันของเบสเซล (Bessel function) กล่าวคือ B_z เป็นผลบวกที่เกี่ยวข้องกับ J_0 และ Y_0 ในขณะที่ E_ϕ เป็นผลบวกอนันต์ที่เกี่ยวข้องกับ J_1 และ Y_1 โดยเราจะต้องแก้ปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) ที่มีเงื่อนไขค่าขอบ (boundary condition) ดังต่อไปนี้

- เงื่อนไขค่าขอบสำหรับสนามแม่เหล็ก $B_z(r, t)$:

- $\lim_{r \rightarrow 0^+} B_z(r, t)$ หาค่าได้และมีค่าเป็น $\frac{\mu_0 n L^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I\left(t - \frac{\sqrt{z^2 + L^2}}{c}\right) \frac{dz}{(z^2 + L^2)^{3/2}}$,
- $\left(\lim_{r \rightarrow L^+} B_z(r, t) \right) - \left(\lim_{r \rightarrow L^-} B_z(r, t) \right) = -\mu_0 n I(t)$, และ

- $\lim_{r \rightarrow L^+} \frac{\partial}{\partial r} B_z(r, t) = \lim_{r \rightarrow L^-} \frac{\partial}{\partial r} B_z(r, t)$
- เงื่อนไขค่าขอบสำหรับสนามไฟฟ้า $E_\phi(r, t)$:
 - $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial r} E_\phi(r, t)$ หาค่าได้และมีค่าเป็น $-\frac{\mu_0 n L^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I' \left(t - \frac{\sqrt{z^2 + L^2}}{c} \right) \frac{dz}{(z^2 + L^2)^{3/2}}$,
 - $\lim_{r \rightarrow L^+} E_\phi(r, t) = \lim_{r \rightarrow L^-} E_\phi(r, t)$, และ
 - $\left(\lim_{r \rightarrow L^+} \frac{\partial}{\partial r} E_\phi(r, t) \right) - \left(\lim_{r \rightarrow L^-} \frac{\partial}{\partial r} E_\phi(r, t) \right) = \mu_0 n I'(t)$

d) ถ้า $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ เราจะได้ $I'(t) = -\omega I_0 \sin(\omega t)$ และ $I''(t) = -\omega^2 I_0 \cos(\omega t)$ ซึ่งทำให้ $I''(t) = -\omega^2 I(t)$ สมการ (7) จะกลายเป็น

$$B_z(r, t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t) \left(1 + \frac{\omega^2}{4c^2} (L^2 - r^2) \right), & 0 < r < L \\ \mu_0 n I(t) \left(-\frac{\omega^2 L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{r}{L}\right) \right), & r > L \end{cases} \quad (7)$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์นี้กับสมการในข้อ a)

- ในบริเวณ $0 < r < L$ ค่าของ $\frac{\omega^2}{4c^2} (L^2 - r^2)$ ซึ่งมีค่าไม่เกิน $\frac{\omega^2 L^2}{4c^2} \approx 6.9 \times 10^{-16}$ (8)

ซึ่งมีค่าน้อยมาก

- ในบริเวณ $r > L$ พิจารณาค่าของ $\left| -\frac{\omega^2 L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{r}{L}\right) \right| = \frac{\omega^2 L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{r}{L}\right)$ แม้ว่าเราจะเลือกห้องทดลองขนาดใหญ่มาก เช่น ห้องทดลองที่มีรัศมี $r = 1 \text{ km}$ เราก็จะได้ว่า

$$\frac{\omega^2 L^2}{2c^2} \ln\left(\frac{r}{L}\right) \approx 1.4 \times 10^{-14} \quad (9)$$

เท่านั้น

ดังนั้น เราไม่จำเป็นต้องทำการปรับปรุงค่าของสนามแม่เหล็ก

หมายเหตุ : พิจารณา $I(t) = \text{Re}(I_0 e^{j\omega t})$ โดยใช้การคาดเดาว่า

$$B_z(r, t) = \text{Re}(\mu_0 n I_0 b(r) e^{j\omega t})$$

สำหรับบางฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน $b(r)$ เมื่อ $j = \sqrt{-1}$ เราจะได้ว่า

$$b(r) = \begin{cases} \kappa J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) & (0 < r < L) \\ \left(\kappa - \frac{\pi \omega L}{2c} Y_0'\left(\frac{\omega L}{c}\right) \right) J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) + \frac{\pi \omega L}{2c} J_0\left(\frac{\omega L}{c}\right) Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) & (r > L) \end{cases}$$

โดยที่ $\kappa = \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{j\omega L}{c} \sec \theta} \cos \theta \, d\theta$

ตอนที่ 2 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าหลังใส่แท่งทองแดง

e) สมมติว่า $R < r < L$ โดยเหตุผลเดียวกับข้อ a) สนามแม่เหล็ก $B_{\text{out}}(t)$ มีค่าเป็น

$$B_{\text{out}}(t) = \mu_0 n I(t) \quad (10)$$

f) ใช้เส้นโค้งปิด C ในรูปที่ 4 สำหรับ $0 < r < R$ เราจะได้ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ผ่าน C เท่ากับ $\pi r^2 B_{\text{in}}(t)$ ในขณะที่ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_\phi$ โดยกฎของฟาราเดย์ เราจะได้ $2\pi r E_\phi = -\pi r^2 B'_{\text{in}}(t)$ หรือ

$$E_\phi(r, t) = -\frac{r}{2} B'_{\text{in}}(t) \quad (11)$$

จากกฎของโอห์ม $\vec{j}(r, t) = \sigma \vec{E}(r, t)$ จะได้ $J_\phi(r, t) = \sigma E_\phi(r, t)$ นั่นคือ

$$J_\phi(r, t) = -\frac{\sigma r}{2} B'_{\text{in}}(t) \quad (12)$$

เราอาจใช้สมการ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ ดังนั้นสำหรับ $0 < r < R$ เราได้ว่า $\frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = -r B'_{\text{in}}(t)$ เพราะฉะนั้น $r E_\phi(r, t) = -\int_0^r \xi B'_{\text{in}}(t) d\xi = -\frac{r^2}{2} B'_{\text{in}}(t)$ ซึ่งทำให้ $E_\phi(r, t) = -\frac{r}{2} B'_{\text{in}}(t)$

g) พิจารณาเส้นโค้งปิด C ในรูปที่ 3 เมื่อ $R < D < L$ เราจะได้

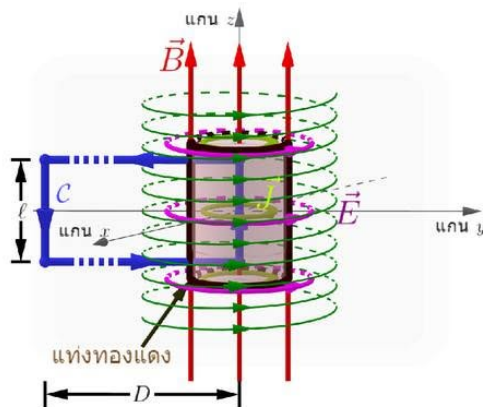
$$\begin{aligned} B_{\text{in}} \ell - B_{\text{out}} \ell &= \mu_0 I_{\text{enc}} \\ B_{\text{in}} \ell - B_{\text{out}} \ell &= \mu_0 \int_0^R J_\phi \ell dr \\ B_{\text{in}} - B_{\text{out}} &= -\frac{\mu_0 \sigma B'_{\text{in}}}{2} \int_0^R r dr \\ B_{\text{in}} - B_{\text{out}} &= -\frac{\mu_0 \sigma R^2}{4} B'_{\text{in}} \end{aligned}$$

หรือ

$$B'_{\text{in}} + \frac{4}{\mu_0 \sigma R^2} B_{\text{in}} = \frac{4}{\mu_0 \sigma R^2} B_{\text{out}}$$

เมื่อใช้ $B_{\text{out}} = \mu_0 n I(t) = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$ จะได้

$$B'_{\text{in}} + \frac{4}{\frac{\mu_0 \sigma R^2}{1/\tau}} B_{\text{in}} = \frac{4}{\frac{\mu_0 \sigma R^2}{B_0/\tau}} \mu_0 n I_0 \cos \omega t \quad (13)$$



รูปที่ 3 : วิธีปิด C (หลังใส่แท่งทองแดง)

- h) สมมติให้คำตอบของสมการอนุพันธ์อยู่ในรูปของ $B_{in}(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta)$ เมื่อแทนกลับเข้าไปในสมการอนุพันธ์ จะได้ดังนี้ :

$$\begin{aligned}\frac{dB_{in}}{dt} + \frac{B_{in}}{\tau} &= \frac{B_0}{\tau} \cos \omega t \\ \alpha \omega \cos(\omega t + \beta) + \frac{\alpha}{\tau} \sin(\omega t + \beta) &= \frac{B_0}{\tau} \cos \omega t \\ \alpha \omega (\cos \omega t \cos \beta - \sin \omega t \sin \beta) + \frac{\alpha}{\tau} (\sin \omega t \cos \beta + \cos \omega t \sin \beta) &= \frac{B_0}{\tau} \cos \omega t \\ \underbrace{\left[\alpha \omega \cos \beta + \frac{\alpha}{\tau} \sin \beta \right]}_{B_0/\tau} \cos \omega t + \underbrace{\left[-\alpha \omega \sin \beta + \frac{\alpha}{\tau} \cos \beta \right]}_0 \sin \omega t &= \frac{B_0}{\tau} \cos \omega t\end{aligned}$$

เมื่อให้สัมประสิทธิ์ของ $\sin \omega t$ เป็นศูนย์ จะได้

$$\tan \beta = \frac{1}{\omega \tau} \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega \tau} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4}{\mu_0 \sigma R^2 \omega} \right) \quad (14)$$

เมื่อให้สัมประสิทธิ์ของ $\cos \omega t$ เท่ากับ B_0/τ จะได้

$$\begin{aligned}\alpha \omega \cos \beta + \frac{\alpha}{\tau} \sin \beta &= \frac{B_0}{\tau} \\ \alpha \omega \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} + \frac{\alpha}{\tau} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} &= \frac{B_0}{\tau} \\ \frac{\alpha}{\tau} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} &= \frac{B_0}{\tau}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\alpha = \frac{B_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{\mu_0 n I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega}{4} \right)^2}} \quad (15)$$

- i) สำหรับ $0 < r < R$ จาก $E_\phi(r, t) = -\frac{r}{2} B'_{in}(t)$ และ $B_{in}(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta)$

$$E_\phi(r, t) = -\frac{r}{2} \alpha \omega \cos(\omega t + \beta), \quad 0 < r < R \quad (16)$$

โดยที่ $\alpha = B_0/\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = \mu_0 n I_0/\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega}{4} \right)^2}$ และ $\beta = \tan^{-1}(1/\omega \tau) = \tan^{-1}(4/\mu_0 \sigma R^2 \omega)$

สำหรับ $R < r < L$ พิจารณาเส้นโค้งปิด C ในรูปที่ 2 เราได้ว่า ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ไหลผ่าน C คือ $\pi R^2 B_{in}(t) + \pi(r^2 - R^2) B_{out}(t)$ ในขณะที่ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_\phi$ ฉะนั้น โดยกฎของฟาราเดย์ เราได้ว่า

$$2\pi r E_\phi = -\pi R^2 B'_{in}(t) - \pi(r^2 - R^2) B'_{out}(t)$$

$$E_\phi = -\frac{R^2}{2r} B'_{in}(t) - \frac{(r^2 - R^2)}{2r} B'_{out}(t)$$

จากนั้นแทน $B_{in}(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta)$ จากข้อ h) และ $B_{out}(t) = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$ จากข้อ e) :

$$E_\phi = -\frac{R^2}{2r} \alpha \omega \cos(\omega t + \beta) + \frac{(r^2 - R^2)}{2r} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t), \quad R < r < L$$

โดยที่ $\alpha = B_0/\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = \mu_0 n I_0/\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega}{4} \right)^2}$ และ $\beta = \tan^{-1}(1/\omega \tau) = \tan^{-1}(4/\mu_0 \sigma R^2 \omega)$

อีกวิธีหนึ่งคือการใช้สมการ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ เนื่องจาก $B_z(r, t) = B_{\text{out}}(t)$ และจากผลลัพธ์ในข้อ e) เราได้ว่า $\frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) = \mu_0 n \omega I_0 r \sin(\omega t)$ ฉะนั้น

$$rE_\phi(r, t) - RE_\phi(R, t) = \int_R^r \mu_0 n \omega I_0 \xi \sin(\omega t) d\xi = \frac{\mu_0 n \omega I_0}{2} (r^2 - R^2) \sin(\omega t)$$

ซึ่งจะทำให้เราได้คำตอบเช่นเดียวกัน

สำหรับ $r > L$ พิจารณาเส้นโค้งปิด C ในรูปที่ 2 เราได้ว่าฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ไหลผ่าน C คือ $\pi R^2 B_{\text{in}}(t) + \pi(L^2 - R^2)B_{\text{out}}(t)$ ในขณะที่ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_\phi$ ฉะนั้น โดยกฎของฟาราเดย์ เราได้ว่า

$$2\pi r E_\phi = -\pi R^2 B'_{\text{in}}(t) - \pi(L^2 - R^2)B'_{\text{out}}(t)$$

$$E_\phi = -\frac{R^2}{2r} B'_{\text{in}}(t) - \frac{(L^2 - R^2)}{2r} B'_{\text{out}}(t)$$

จากนั้นแทน $B_{\text{in}}(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta)$ จากข้อ h) และ $B_{\text{out}}(t) = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$ จากข้อ e) :

$$E_\phi = -\frac{R^2}{2r} \omega \alpha \cos(\omega t + \beta) + \frac{(L^2 - R^2)}{2r} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t), \quad r > L$$

โดยที่ $\alpha = B_0 / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = \mu_0 n I_0 / \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega}{4}\right)^2}$ และ $\beta = \tan^{-1}(1/\omega\tau) = \tan^{-1}(4/\mu_0 \sigma R^2 \omega)$

อีกวิธีหนึ่งคือการใช้สมการ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ เนื่องจาก $B_z(r, t) = 0$ ดังนั้น $\frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) = 0$ ซึ่งหมายความว่า $rE_\phi(r, t)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ r สำหรับ $r > L$ ฉะนั้น $rE_\phi(r, t) = LE_\phi(L, t)$ ซึ่งทำให้คำตอบเดียวกัน

ตอนที่ 3 การทำความร้อนของแท่งทองแดง

j) เนื่องจาก $J_\phi(r, t) = \sigma E_\phi(r, t)$ เราได้ว่า

$$J_\phi(r, t) = -\frac{\sigma r}{2} \alpha \omega \cos(\omega t + \beta) \quad (17)$$

$$\text{โดยที่ } \alpha = B_0 / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = \mu_0 n I_0 / \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega}{4} \right)^2} \text{ และ}$$

$$\beta = \tan^{-1}(1/\omega\tau) = \tan^{-1}(4/\mu_0 \sigma R^2 \omega)$$

k) ให้ $0 < r < R$ พิจารณาการไหลของกระแสไหลวนระหว่างรัศมี r และ $r + dr$ แรงดันไฟฟ้าที่เกิดขึ้นคือ

$$V(r, t) = 2\pi r E_\phi(r, t)$$

เนื่องจากกระแสไฟฟ้าที่ไหลวนในช่วงรัศมีดังกล่าวคือ $dI_{\text{eddy}} = H J_\phi(r, t) dr$ กำลังไฟฟ้าจากกระแสไหลวนในช่วงรัศมีนี้คือ

$$dP = V(r, t) dI_{\text{eddy}} = 2\pi r E_\phi(r, t) J_\phi(r, t) dr dz$$

$$\text{จาก } E_\phi = -\frac{r}{2} B'_{in} = -\frac{r}{2} \frac{B_0 \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t + \beta) \text{ และ } J_\phi = \sigma E_\phi = -\frac{r}{2} \frac{\sigma B_0 \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t + \beta)$$

จะได้

$$P(t) = \frac{\sigma}{4} \frac{B_0^2 \omega^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)} \cos^2(\omega t + \beta) \underbrace{\int_{z=0}^H \int_{r=0}^R r^2 \cdot 2\pi r dr dz}_{\pi R^4 H / 2}$$

$$P(t) = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2 R^4 H}{8 (1 + \omega^2 \tau^2)} \cos^2(\omega t + \beta)$$

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2 R^4 H}{16 (1 + \omega^2 \tau^2)}$$

เมื่อแทน $\tau = \mu_0 \sigma R^2 / 4$ และ $B_0 = \mu_0 n I_0$ จะได้

$$\langle P \rangle = \frac{\pi n^2 H I_0^2}{\sigma \left(1 + \left(\frac{4}{\mu_0 \sigma \omega R^2} \right)^2 \right)}$$

l) ค่าเชิงตัวเลขคือ $\langle P \rangle = 13.56 \text{ W}$

มวลของแท่งทองแดงคือ $m = \pi R^2 H \rho = 0.281 \text{ kg}$

ความร้อนที่ต้องใช้ $Q = mC(T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}) = 115 \text{ kJ}$

เวลาที่ใช้คือ $t' = \frac{Q}{\langle P \rangle} = 8.48 \times 10^3 \text{ s} = 141 \text{ min}$