

ข้อที่ 1 บานพับ

[11 คะแนน]

ข้อ 1.1, และ 1.2 ไม่มีความเกี่ยวเนื่องกัน

สมการที่อาจจะเป็นประโยชน์: $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, $\frac{d}{dx} (u/v) = (v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}) / v^2$

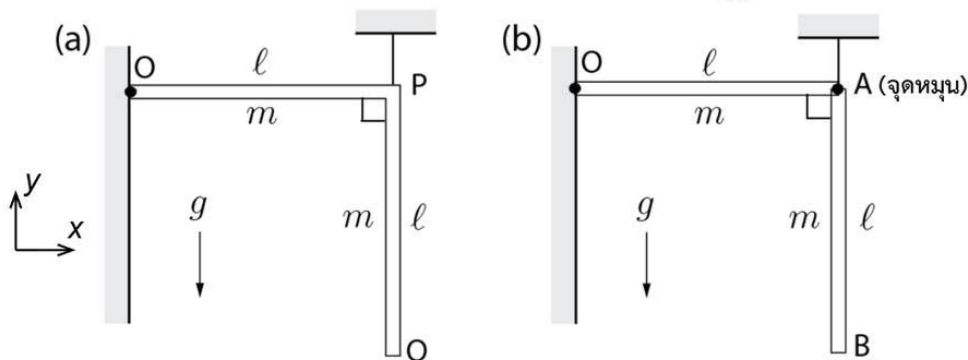
ตอนที่ 1.1 บานพับหมุน

พิจารณาวัตถุสองชนิด วัตถุชนิดแรกคือไม้ฉากบางและสม่ำเสมอ OPQ ที่ประกอบจากด้านสองด้านโดยแต่ละด้านยาว ℓ มวล m ดังรูป 1.1(a) มุม OPQ เป็นมุมฉากเสมอ

วัตถุชนิดสองคือระบบแท่งไม้ OAB ซึ่งประกอบด้วยแท่งไม้ OA และ AB แต่ละแท่งยาว ℓ มวล m ดังรูป 1.1 (b) แท่งไม้ทั้งสองถูกยึดติดกันด้วยบานพับที่จุด A ซึ่งสามารถพับหรือกางออกได้ นำวัตถุทั้งสองมายึดกับผนังที่จุด O โดยวัตถุทั้งคู่สามารถหมุนได้อย่างอิสระรอบจุด O

วัตถุถูกแขวนให้อยู่ในสมดุลด้วยเชือกเบาที่อยู่ในแนวตั้งดังรูป 1.1 ณ ขณะเริ่มต้นนี้ วัตถุทั้งสองอยู่หนึ่งหลังจากนั้นเชือกถูกตัดออกเพื่อให้วัตถุทั้งสองหมุนได้อย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วง

(สำหรับแท่งไม้ยาว ℓ มวล m ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุด cm คือ $\frac{1}{12} m \ell^2$)



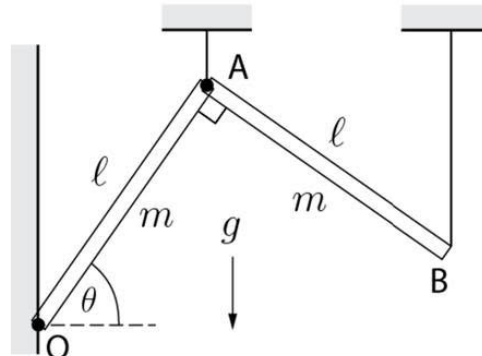
รูปที่ 1.1 (a) ไม้ฉาก OPQ แต่ละด้านยาว ℓ มวล m (b) ระบบแท่งไม้ OAB

a) จงหาขนาดและทิศของความเร็วเชิงมุมของไม้ฉาก OPQ ทันทีหลังจากที่เชือกถูกตัด [0.7 คะแนน]

b) จงหาขนาดและทิศของความเร็วของจุด Q ทันทีหลังจากที่เชือกถูกตัด [0.3 คะแนน]

c) ทันทีหลังจากที่เชือกถูกตัด จงหาแรงในแนวนอนที่กระทำต่อแท่ง AB และ ขนาดและทิศของความเร็วเชิงมุมของแท่งไม้ OA และ AB [1.0 คะแนน]

d) จงหาขนาดและทิศของความเร็วของจุด B ทันทีหลังจากที่เชือกถูกตัด [0.3 คะแนน]



รูปที่ 1.2 ตอนเริ่มต้นระบบแท่งไม้ OAB ถูกแขวนให้ทำมุม θ และมุม OAB เป็นมุมฉาก

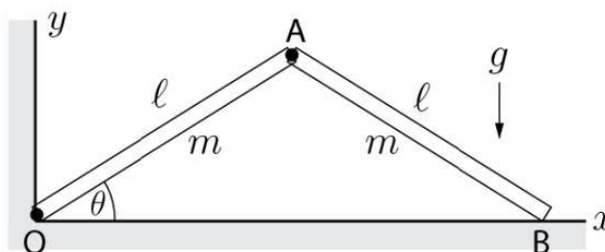
นำระบบแท่งไม้ OAB จาก 1.1(b) มาแขวนด้วยเชือกเบาให้ตอนเริ่มต้นมีลักษณะดังรูป 1.2 โดยที่แท่ง OA ทำมุม θ กับแนวระดับและตอนเริ่มต้นมุม OAB เป็นมุมฉาก หลังจากนั้นเชือกทั้งสองถูกตัดออกพร้อมกันเพื่อให้วัตถุทั้งสองหมุนได้อย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วง

e) จงหาขนาดและทิศของความเร่งเชิงมุมของแท่ง OA และ AB ทันทีหลังจากที่เชือกทั้งสองถูกตัดพร้อมกัน

[3.0 คะแนน]

ตอนที่ 1.2 บานพับไกล

ระบบแท่งไม้สม่ำเสมอ OAB จากตอนที่ 1.1 ถูกวางในแนวตั้งบนพื้นลื่นดังรูปที่ 1.3 จุด O ถูกยึดติดไว้กับจุดกำเนิดด้วยหมุดลื่นโดยที่แท่ง OA สามารถหมุนได้อย่างอิสระรอบแกน z จุด B กำลังเลื่อนออกจากผนังจนกระทั่งแท่ง OA ทำมุม θ กับแนวราบและมีขนาดของความเร็วเชิงมุม ω



รูปที่ 1.3 ระบบแท่งไม้ OAB กำลังกางออกบนพื้นลื่น

f) จงหาจุดศูนย์กลางมวล x_{cm} และ y_{cm} ของระบบแท่งไม้ OAB (จุด O คือจุดกำเนิด)

[0.3 คะแนน]

g) พลังงานจลน์ของระบบแท่งไม้ OAB สามารถเขียนอยู่ในรูป $E_k = (\beta + \sin^2 \theta)m\ell^2\omega^2$

โดยที่ β เป็นค่าคงที่ จงหาค่าของ β

[0.9 คะแนน]

h) จงหาขนาดและทิศของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบแท่งไม้ OAB รอบจุด O

[1.0 คะแนน]

สมมติให้ระบบแท่งไม้ OAB เริ่มต้นจากแนวตั้งโดยที่ปลาย B อยู่ชิดกับจุด O ($\theta = 90^\circ$) หลังจากนั้น ปลาย B ได้เริ่มเลื่อนจากหยุดนิ่งออกมา จนกระทั่งขณะที่ A ก่อนจะถึงพื้นพอดี ($\theta = 0^\circ$)

i) จงหาขนาดของความเร็วเชิงมุมของแท่ง OA

[0.5 คะแนน]

j) จงหาแรงปฏิกิริยาที่พื้นกระทำต่อแท่งไม้ที่จุด B

[1.8 คะแนน]

k) จงหาแรงที่แกนหมุนของหมุดกระทำต่อแท่งไม้ที่จุด O ในแนวแกน x และ y

[1.2 คะแนน]

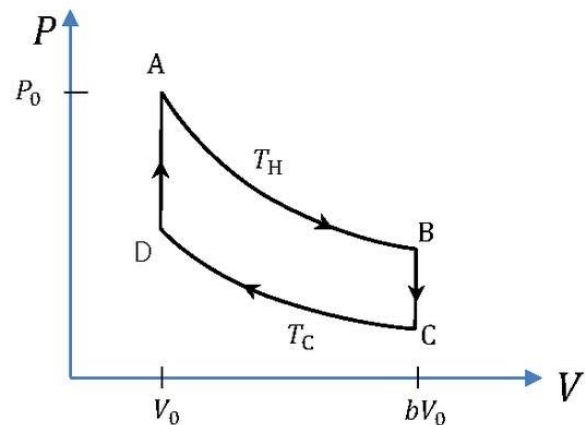
ข้อที่ 2 Stirling Engine & A Toy Boat

[8 คะแนน]

ตอนที่ 1 Stirling Engine

เครื่องยนต์สเตอร์ลิง (Stirling Engine) เป็นเครื่องยนต์ความร้อนประเภทหนึ่งที่ใช้แหล่งกำเนิดความร้อน (hot reservoir) จากภายนอกเครื่องยนต์ ความร้อนจะไหลผ่านผนังของเครื่องยนต์ ทำให้แก๊สภายในเครื่องยนต์ร้อนขึ้น ขยายตัวดันลูกสูบให้เคลื่อนที่ หลังจากนั้นความร้อนบางส่วนจะถูกทิ้งไปที่อุณหภูมิต่ำ (cold reservoir) แล้วลูกสูบจะเคลื่อนที่กลับ แก๊สภายในเครื่องยนต์อยู่ในระบบปิด (closed cycle) เครื่องยนต์ประเภทนี้ต่างกับเครื่องยนต์สันดาปภายใน (internal combustion engine) เนื่องจากไม่มีการเผาไหม้เชื้อเพลิงภายในเครื่องยนต์ และไม่มีการแลกเปลี่ยนแก๊สกับระบบภายนอก

รูปที่ 1 แสดง PV-diagram อย่างง่ายของเครื่องยนต์สเตอร์ลิง ที่ทำงานอยู่ระหว่างอุณหภูมิสูง T_H และอุณหภูมิต่ำ T_C เส้นทาง $A \rightarrow B$ และ $C \rightarrow D$ มีอุณหภูมิต่ำ ส่วนเส้นทาง $B \rightarrow C$ และ $D \rightarrow A$ มีปริมาตรคงตัว โดยที่ตำแหน่ง A แก๊สมีความดัน P_0 และปริมาตร V_0 เมื่อขยายตัวแบบ isothermal ไปที่ B จะมีปริมาตร bV_0



รูปที่ 1 PV-diagram อย่างง่ายของเครื่องยนต์สเตอร์ลิง

กำหนดให้เครื่องยนต์มีแก๊สอุดมคติจำนวน n โมล ความจุความร้อนต่อโมลที่ปริมาตรคงตัว C_V

ให้ R เป็นค่าคงตัวของแก๊ส และ $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$

a) จงหาความดันที่จุด B, C และ D ในรูปของตัวแปรที่โจทย์กำหนดให้ [0.3 คะแนน]

b) คำนวณความร้อนที่แก๊สได้รับ (Q) งานที่ทำโดยแก๊ส (W) และการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของแก๊ส (ΔU) สำหรับเส้นทางทั้งสี่ในรูปของตัวแปรที่โจทย์กำหนดให้ เติมคำตอบที่ได้ลงในตารางในกระดาษสรุปคำตอบ [2.4 คะแนน]

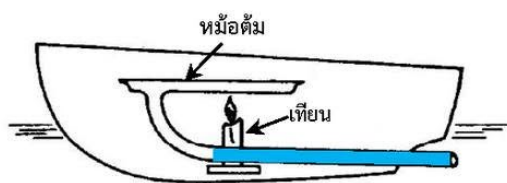
c) จงหาประสิทธิภาพของเครื่องยนต์นี้ ตอบในรูปของ T_H, T_C, C_V และ b [0.9 คะแนน]

d) เครื่องยนต์สเตอร์ลิงบางชนิด จะมี regenerator สำหรับดักเก็บความร้อนทั้งหมดที่โดนทิ้งในเส้นทาง $B \rightarrow C$ แล้วนำวนกลับมาใช้ระหว่างเส้นทาง $D \rightarrow A$ จงหาประสิทธิภาพในกรณีนี้ [0.5 คะแนน]

ตอนที่ 2 A Toy Boat

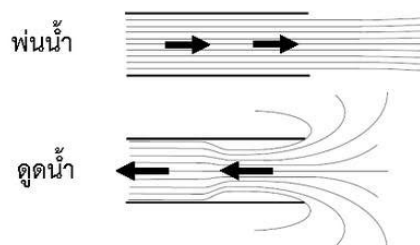
รูปที่ 2 แสดงเรือป๊อปแบ็ก (pop-pop หรือ putt-putt boat) เป็นเรือที่ใช้เปลวไฟจากเทียนเป็นแหล่งความร้อนภายนอก มีหม้อต้มที่เชื่อมต่อกับท่อยาวที่มีทางออกใต้น้ำ หากผาด้านบนของหม้อต้มทำจากแผ่นโลหะบาง มันจะสามารถโค้งงอ โป่งออกแล้วยุบเข้าเมื่อมีการเปลี่ยนความดัน เกิดเป็นเสียง “ป๊อก-แบ็ก” เป็นที่มาของชื่อเรือ

ปลายท่ออยู่ใต้ผิวน้ำเพียงเล็กน้อย ถือได้ว่าบริเวณปลายท่อมีความดันเท่าความดันบรรยากาศ P_a เมื่อหม้อต้มร้อน จนมีความดันภายในมากกว่า P_a แก๊สในหม้อต้มซึ่งประกอบด้วยอากาศและไอน้ำจะขยายตัว ดันน้ำภายในท่อให้พุ่งเป็นลำออกไปด้านหลังเรือ เกิดแรงผลักดันให้เรือเคลื่อนที่ไปข้างหน้า ระหว่างการขยายตัวความดันจะลดลง มีการถ่ายเทความร้อนให้กับน้ำและท่อส่วนที่เย็นกว่าหม้อต้ม แล้วเรือจะเริ่มดูดน้ำกลับเข้ามาในท่อที่อุณหภูมิต่ำกว่าเดิมเล็กน้อย เมื่อครบรอบความร้อนที่ได้รับจากเปลวไฟของเทียนจะทำให้อุณหภูมิของแก๊สสูงขึ้นอีกครั้ง เป็นการเริ่มต้นรอบการทำงานใหม่



รูปที่ 2 เรือป๊อกแบ็ก (ดัดแปลงจาก R.L. Curl.

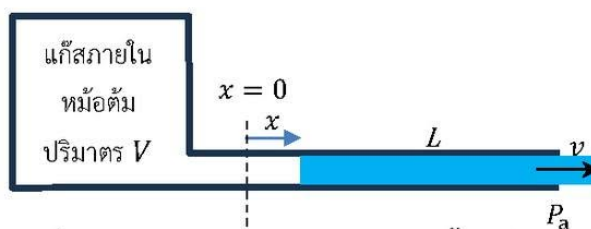
“Physics in a toy boat”, Am. J. Phys. 1963)



รูปที่ 3 รูปขยายของ streamline ที่ปลายท่อขณะผิวน้ำ

(บน) ขณะดูดน้ำ (ล่าง)

ให้ r เป็นรัศมีของท่อสม่ำเสมอ ให้ x เป็นตำแหน่งของส่วนปลายของน้ำด้านที่ติดกับหม้อต้มดังแสดงในรูปที่ 4 ให้ $x = 0$ ตรงตำแหน่งที่ความดันภายในหม้อต้มเท่ากับ P_a พอดี ซึ่งขณะนั้นแก๊สมีปริมาตร V_a ดังนั้นปริมาตรแก๊สมีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ $V(x) = V_a + \pi r^2 x$



รูปที่ 4 แบบจำลองหม้อต้มและตำแหน่งของน้ำภายในท่อขณะปลายด้านในอยู่ที่ตำแหน่ง x และน้ำถูกพ่นออกด้วยความเร็ว v

จากการทดลองพบว่าการเคลื่อนของลำน้ำในท่อ เกิดขึ้นเป็นระยะเล็กๆ ทำให้ประมาณได้ว่าขณะใด ๆ นั้น

$\pi r^2 x \ll V_a$ ระยะสูงสุดของการเคลื่อน $x_{\max} \ll L$ และยังสามารถประมาณได้ว่าความยาวของลำน้ำในท่อที่มีขนาด L คงตัว นักเรียนสามารถใช้การประมาณ $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ เมื่อ $|x| \ll 1$

การทำงานของเครื่องยนต์เรือคล้ายกับเครื่องยนต์สเตอร์ลิง แต่ในข้อย่อย e), f), g) และ h) เราจะคำนวณแรงขับเคลื่อนเชิงกลโดยยังไม่เทียบกับเครื่องยนต์สเตอร์ลิง

e) ให้ความหนาแน่นของน้ำเท่ากับ ρ ใช้การประมาณที่เหมาะสม หาเวลาที่ใช้ในการพ่นน้ำ (เวลาที่น้ำเริ่มเคลื่อนที่จนได้ระยะ $x_{\max}$) ตอบในรูป P_a, V_a, ρ, L และ r [1.4 คะแนน]

f) จงหาความเร็วสูงสุด $v_{\max}$ ของน้ำที่พ่นออกมา แล้วหาขนาดของแรงสูงสุดที่ผลักเรือไปข้างหน้า ให้ประมาณว่าเรือเคลื่อนที่ช้ามากเทียบกับความเร็วน้ำที่พ่นออกมา [0.7 คะแนน]

หลังจากพ่นน้ำจนสุดแล้วจะเริ่มดูดน้ำกลับ ขณะที่ดูดน้ำกลับนั้น น้ำที่บริเวณปลายท่อมาจากบริเวณรอบๆ และเมื่อพิจารณาโดยละเอียดพบว่าจังหวะดูดน้ำกลับไม่มีแรงกระทำกับเรือ และเวลาที่ใช้ในการดูดน้ำกลับมีขนาดเท่าๆ กับเวลาที่ใช้ในการพ่นน้ำ กำหนดให้ $V_a = 5.0 \text{ cm}^3, L = 10 \text{ cm}, \rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, r = 1.0 \text{ mm}, P_a = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ และ $x_{\max} = 1.0 \text{ cm}$

g) จงคำนวณเวลาในข้อ e) เป็นวินาที และหา $v_{\max}$ ในข้อ f) ในหน่วย m/s [0.2 คะแนน]

h) จงหาแรงเฉลี่ยในหน่วยนิวตันที่ขับเรือไปข้างหน้าต่อ 1 รอบการทำงานของเครื่องยนต์ กำหนดให้ค่าเฉลี่ย $\langle \sin^2 \theta \rangle = 1/2$ [0.7 คะแนน]

ภายในหม้อต้มมีการกลายเป็นไอและการควบแน่นของไอน้ำทำให้มวลของแก๊สไม่คงตัว ซึ่งต่างจากเครื่องยนต์สเตอร์ลิงที่มวลของแก๊สคงตัว แต่ในข้อย่อยต่อไปนี้ เราจะลองเทียบกับเครื่องยนต์สเตอร์ลิงเพื่อประมาณผลต่างของอุณหภูมิ $\Delta T = T_H - T_C$ อย่างหยาบๆ

i) เราประมาณว่าเทียนให้กำลังความร้อน $\dot{Q} \approx 30 \text{ W}$ และ $T_H \approx 100^\circ \text{C}$
เนื่องจากมวลของเรือมีค่ามากเทียบกับมวลของน้ำที่พ่นออกมา งานส่วนใหญ่จึงส่งผลเป็นพลังงานจลน์ของน้ำ จงหาค่าประสิทธิภาพของเรือเป็นเปอร์เซ็นต์ แล้วจงหา ΔT โดยใช้ผลจากข้อ d)
กำหนดให้ค่าเฉลี่ย $\langle |\sin^3 \theta| \rangle = \frac{4}{3\pi}$ [0.9 คะแนน]

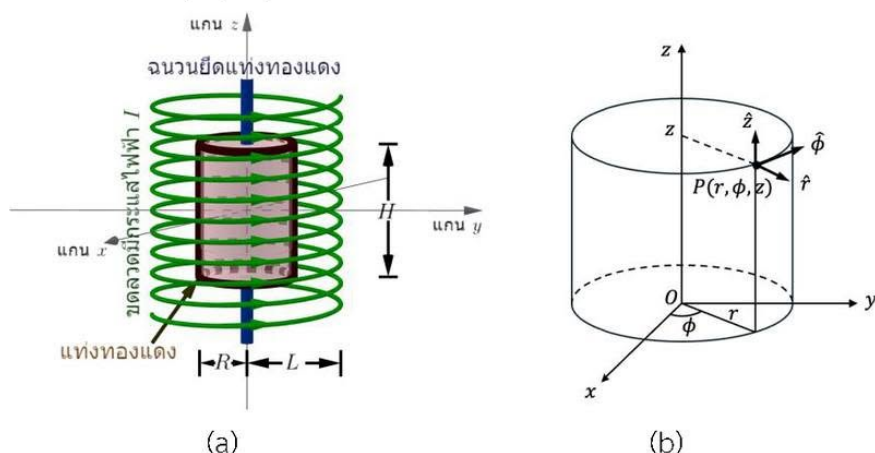
ข้อที่ 3 การทำความร้อนด้วยการเหนี่ยวนำแม่เหล็ก

[11 คะแนน]

คำคงตัวและสมการที่อาจจะต้องใช้อยู่ท้ายข้อสอบ

การทำความร้อนด้วยการเหนี่ยวนำแม่เหล็ก (magnetic induction heating) คือการใช้การเหนี่ยวนำไฟฟ้าในตัวนำไฟฟ้าเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็ก เพื่อสร้างกระแสไฟฟ้าไหลวน (eddy current) ในตัวนำไฟฟ้า และกระแสไฟฟ้าไหลวนนี้จะก่อให้เกิดความร้อนในตัวนำไฟฟ้า

รูปที่ 1a แสดงขดลวดซึ่งมีหน้าตัดเป็นวงกลมที่มีรัศมีคงที่เป็น L และมีความหนาแน่นขดลวดเป็น n รอบต่อหน่วยความยาว นำแท่งทองแดงที่มีรูปร่างเป็นทรงกระบอกตันที่มีหน้าตัดเป็นวงกลมรัศมี R และมีความยาว H ไปสอดไว้ตรงกลางของขดลวด นำวัสดุซึ่งเป็นฉนวนไฟฟ้าและฉนวนความร้อนไปยัดแท่งทองแดงไว้ให้อยู่กับที่ กำหนดทิศทางของแกน x , แกน y และแกน z ดังในรูป โดยแกน z คือแกนกลางของแท่งทองแดงและขดลวด รูปที่ 1b แสดงพิกัด $P(r, \phi, z)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกซึ่งเป็นระบบพิกัดที่เราจะใช้ในโจทย์ข้อนี้



รูปที่ 1 (a) แผนภาพแสดงตำแหน่งของขดลวดและแท่งทองแดงในระบบพิกัดสามมิติ โดยมีจุดกำเนิด O แทนจุดกึ่งกลางของแท่งทองแดงในระบบพิกัดทรงกระบอก (b) ระบบพิกัดทรงกระบอก

สมมติให้ขดลวดมีความยาวมากกว่ารัศมี L มาก ๆ และขดลวดมีการพันหนาแน่นจนสามารถทำให้ประมาณได้ว่ากระแสไฟฟ้า I ไหลในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\hat{\phi}$ นอกจากนี้ $H \gg R$ และเส้นลวดของขดลวดมีรัศมีของหน้าตัดเล็กมากเมื่อเทียบกับ R

กระแสไฟฟ้าในขดลวดที่เวลา t มีค่าเป็น $I(t)$ โดยเรากำหนดว่า $I(t) > 0$ เมื่อกระแสไฟฟ้าไหลในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\hat{\phi}$ และ $I(t) < 0$ เมื่อกระแสไฟฟ้าไหลในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\hat{\phi}$ เราใช้สัญลักษณ์ $I'(t)$ แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $I(t)$

โดยความสมมาตร สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าไม่ขึ้นกับ ϕ และ z ดังนั้นสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ระยะห่าง r จากแกนกลางของขดลวด ที่เวลา t คือ $\vec{B}(r, t)$ และ $\vec{E}(r, t)$ ตามลำดับ

ตอนที่ 1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าก่อนใส่แท่งทองแดง

[3.0 คะแนน]

เริ่มต้นพิจารณาขดลวดที่ไม่มีทั้งแท่งทองแดงและฉนวนยัดแท่งทองแดงอยู่ภายในขดลวด

a) โดยไม่คำนึงถึงผลจากการเปลี่ยนแปลง $E_\phi(r, t)$ จงหาค่าของ $B_z(r, t)$ ของสนามแม่เหล็กโดยตอบในรูปของ $I(t)$, n และค่าคงตัวทางฟิสิกส์ (พิจารณากรณี $0 < r < L$ และ $r > L$) [0.5 คะแนน]

b) จากข้อ a) จงหาค่าของ $E_\phi(r, t)$ ของสนามไฟฟ้า โดยตอบในรูปของ $I'(t)$, n , L และค่าคงตัวทางฟิสิกส์ (พิจารณากรณี $0 < r < L$ และ $r > L$) [1.0 คะแนน]

c) สมมติว่ากระแสไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงช้าเพียงพอที่จะทำให้สนามแม่เหล็กที่ผิวด้านนอกของขดลวดมีค่าเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้ในข้อ a) ถ้าหากเราคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าโดยใช้กฎของแอมแปร์-แมกซ์เวลล์ และใช้ผลลัพธ์จากข้อ b) จงหาสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ $\tilde{B}_z(r, t)$ แล้วหาสนามแม่เหล็กลัพธ์ในรูปของ $I(t)$, $I''(t)$, n , L และค่าคงตัวทางฟิสิกส์ (พิจารณากรณี $0 < r < L$ และ $r > L$) [1.0 คะแนน]

ในกรณีของไฟฟ้ากระแสสลับ $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ เมื่อ I_0 และ $\omega = 2\pi\nu$ เป็นค่าคงที่

d) สำหรับ $L = 5.0$ cm และ $\nu = 50$ Hz จงแสดงว่าผลลัพธ์จากการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าส่งผลต่อขนาดของสนามแม่เหล็กน้อยมาก และสามารถตัดทิ้งได้ [0.5 คะแนน]

ตอนที่ 2 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าหลังใส่แท่งทองแดง

[5.0 คะแนน]

วางแท่งทองแดงไว้ในขดลวด และตรึงด้วยฉนวน (รูปที่ 1a) แม้ว่าระบบจะสูญเสียความสมมาตรภายใต้การเลื่อนขนานแกน z เพราะแท่งทองแดงมีความยาวจำกัด เรายังคงประมาณว่า สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าขึ้นอยู่กับ r และ t เท่านั้น โดยผลลัพธ์จากตอนที่ 1 เราสมมติให้สนามแม่เหล็ก $\vec{B}(r, t)$ มีทิศทางตามแนวแกน z เท่านั้น และสนามไฟฟ้า $\vec{E}(r, t)$ มีทิศทางตามแนวแกน ϕ เท่านั้น บริเวณที่เราจะพิจารณาได้แก่ $0 < r < R$, $R < r < L$ และ $r > L$

ตอนที่ 1 แสดงให้เห็นว่าก่อนที่จะใส่แท่งทองแดงเข้าไปในขดลวด ค่าของ $B_z(r, t)$ มีการเปลี่ยนแปลงตามรัศมี r น้อยมาก เราจะใช้การประมาณว่าหลังจากใส่แท่งทองแดงเข้าไปในขดลวดแล้ว ค่าของ $B_z(r, t)$ ก็จะเปลี่ยนแปลงไม่มากตามรัศมี r (ทั้งในกรณี $0 < r < R$ และ $R < r < L$) เราจึงเขียน

$$B_z(r, t) = \begin{cases} B_{in}(t), & 0 < r < R \\ B_{out}(t), & R < r < L \\ 0, & r > L \end{cases}$$

ให้ $B'_{in}(t)$ และ $B'_{out}(t)$ แทนอนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $B_{in}(t)$ และ $B_{out}(t)$ ตามลำดับ

ในแท่งทองแดง ($0 < r < R$) มีสนามไฟฟ้า $E_\phi(r, t)$ และความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $J_\phi(r, t)$ ในทิศทางเดียวกัน กำหนดให้ σ คือสภาพนำไฟฟ้า (electrical conductivity) ของทองแดง

e) จงหา $B_{\text{out}}(t)$ ในรูปของ $n, I(t)$ และค่าคงตัวทางฟิสิกส์

[0.5 คะแนน]

f) จงหา $J_\phi(r, t)$ ในรูปของ $\sigma, r, B'_{\text{in}}(t)$ และค่าคงตัวทางฟิสิกส์

[0.5 คะแนน]

g) เมื่อ $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ จงแสดงว่า $B_{\text{in}}(t)$ จะเป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์

$$B'_{\text{in}}(t) + \frac{B_{\text{in}}(t)}{\tau} = \frac{B_0}{\tau} \cos(\omega t)$$

โดยที่ τ และ B_0 เป็นค่าคงที่ที่นักเรียนต้องระบุ โดยตอบในรูปของ σ, n, I_0, R และค่าคงตัวทางฟิสิกส์

[1.0 คะแนน]

h) กำหนดให้สมการในข้อ g) มีคำตอบในรูปของ $B_{\text{in}}(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta)$ โดยที่ α และ β เป็นค่าคงที่ จงหา α และ β โดยตอบในรูปของ $\sigma, n, I_0, R, \omega$ และค่าคงตัวทางฟิสิกส์

[1.0 คะแนน]

i) จงหา $E_\phi(r, t)$ ในรูปของ $\sigma, n, I_0, R, \omega, L$ และค่าคงตัวทางฟิสิกส์ (พิจารณากรณี $0 < r < R, R < r < L$ และ $r > L$)

[2.0 คะแนน]

ตอนที่ 3 การทำความร้อนของแท่งทองแดง

[3.0 คะแนน]

จากตอนที่ 2 เราได้ว่าการเปลี่ยนแปลงกระแสไฟฟ้า $I(t)$ ในขดลวดเหนี่ยวนำทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าไหลวนในแท่งทองแดง กระแสไฟฟ้าไหลวนนี้ก่อให้เกิดความร้อนในแท่งทองแดง

j) จงหา $J_\phi(r, t)$ ในรูปของ $n, I_0, \sigma, R, \omega$ และค่าคงตัวทางฟิสิกส์

[0.5 คะแนน]

k) โดยการหาค่ากำลังไฟฟ้า $P(t)$ จากกระแสไหลวนในแท่งทองแดง จงหาค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ย $\langle P \rangle$ ในรูปของ $n, I_0, \sigma, R, H, \omega$ และค่าคงตัวทางฟิสิกส์

[1.5 คะแนน]

กำหนดให้แท่งทองแดงเป็นทรงกระบอกตันที่มีรัศมีฐาน $R = 1.00 \text{ cm}$ และความยาว $H = 10.0 \text{ cm}$ สมมติว่า $I_0 = 100 \text{ A}$, $n = 10.0 \text{ cm}^{-1}$ และ $\omega = 2\pi\nu$ โดยที่ $\nu = 50.0 \text{ Hz}$ สมมติให้เริ่มต้นแท่งทองแดงอยู่ที่อุณหภูมิห้อง $T_{\text{room}} = 20.0^\circ\text{C}$ ข้อมูลเกี่ยวกับทองแดงมีดังนี้

จุดหลอมเหลว $T_{\text{melt}} = 1085^\circ\text{C}$

ความหนาแน่น $\rho = 8935 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

ความจุความร้อน $C = 385 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

สภาพนำไฟฟ้า $\sigma = 5.96 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

เราจะประมาณว่าสมบัติต่าง ๆ ของทองแดงที่แสดงด้านบนมีค่าคงที่ โลหะทองแดงเป็นตัวนำความร้อนที่ดี ทำให้ทุกจุดในทองแดงมีอุณหภูมิเท่ากันที่เวลาใด ๆ

l) จงคำนวณว่านานเท่าใดแท่งทองแดงจะมีอุณหภูมิเท่ากับจุดหลอมเหลวพอดี (ไม่ต้องคำนึงถึงการสูญเสียความร้อนของแท่งทองแดงไม่ว่าจะผ่านกระบวนการใดก็ตาม)

[1.0 คะแนน]

ค่าคงตัวที่อาจจะต้องใช้

สภาพยอมทางไฟฟ้า (permittivity) ของสุญญากาศ $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

ค่าความซึมซาบได้ทางแม่เหล็ก (permeability) ของสุญญากาศ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$

สมการทางคณิตศาสตร์ที่อาจเป็นประโยชน์

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{F}$ ใด ๆ กำหนดให้ F_r , F_ϕ และ F_z แทนองค์ประกอบ (component) ตามแนวเวกเตอร์ $\hat{r}$, $\hat{\phi}$ และ $\hat{z}$ ตามลำดับ นั่นคือ $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} + F_z \hat{z}$

1. เกรเดียนท์ (gradient) ของฟังก์ชันสเกลาร์ f ที่มีนิยามบนจุดต่าง ๆ ในระบบพิกัดสามมิติ คือ

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

2. ไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่มีนิยามบนจุดต่าง ๆ ในระบบพิกัดสามมิติ คือ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z = \frac{\partial}{\partial r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (r F_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

3. เคิร์ล (curl) ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่มีนิยามบนจุดต่าง ๆ ในระบบพิกัดสามมิติ คือ

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right) \hat{z} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_\phi \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial}{\partial z} F_r - \frac{\partial}{\partial r} F_z \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} F_r \right) \hat{z} \end{aligned}$$

4. Divergence theorem: $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$ Stokes' theorem: $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

5. Maxwell's equations

	Integral equations	Differential equations
กฎของเกาส์	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
กฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็ก	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
กฎของฟาราเดย์	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
กฎของแอมแปร์-แมกซ์เวลล์	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$

6. สูตรอนุพันธ์ และปริพันธ์

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin(ax) = a \cos(ax)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \sin(ax)$$

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C$$

7. สูตรตรีโกณมิติ

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$