

ข้อที่ 1. แรงดันบนลูกสูบ

[10 คะแนน]

- a) กำหนดให้ภาชนะมีพื้นที่หน้าตัด A ในขณะลูกสูบอยู่ห่างจากก้นภาชนะเป็นระยะทาง x ปริมาตรของแก๊สจะเท่ากับ Ax เราสามารถใช้กฎของแก๊สอุดมคติเพื่อเขียนความดัน $P = NkT/Ax$ แรงที่กระทำบนลูกสูบมีขนาดเท่ากับ

$$F = PA = \frac{NkT}{x}$$

- b) งานของแรง F

$$\begin{aligned} W_x &= \int_a^x F dx \\ &= NkT \int_a^x \frac{1}{x} dx \\ &= NkT \ln\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $x = 2a$ จะได้ $W_{2a} = NkT \ln 2$

- c) งานที่แก๊สทำเท่ากับพลังงานจลน์ของลูกสูบ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mv^2 &= W_x \\ \frac{1}{2}Mv^2 &= NkT \ln\left(\frac{x}{a}\right) \\ v &= \sqrt{\frac{2NkT}{M} \ln\left(\frac{x}{a}\right)} \end{aligned}$$

- d) ที่ตำแหน่ง $x = b$ แรงดันจากแก๊สเท่ากับน้ำหนักของลูกสูบ

$$\begin{aligned} \frac{NkT}{b} &= Mg \\ b &= \frac{NkT}{Mg} \end{aligned}$$

- e) ใช้กฎของนิวตัน

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -Mg + \frac{NkT}{x} \\ \ddot{x} &= -g + \frac{NkT}{Mx} \end{aligned}$$

โดยการเขียน $x = b + \delta(t)$ เราจะได้

$$\ddot{\delta} = -g + \frac{NkT}{M(b + \delta)}$$

$$\begin{aligned}
 &= -g + \frac{NkT}{Mb} \left(1 + \frac{\delta}{b}\right)^{-1} \\
 &= -g + \frac{NkT}{Mb} \left(1 - \frac{\delta}{b}\right) \quad (\delta \ll b) \\
 &= \underbrace{-g + \frac{NkT}{Mb}}_{=0} - \frac{NkT}{Mb^2} \delta \\
 &= -\frac{NkT}{Mb^2} \delta
 \end{aligned}$$

สมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปของ $\ddot{\delta} + \omega^2 \delta = 0$ การเคลื่อนที่ของลูกสูบเป็นแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกโดยมีความถี่เชิงมุม $\omega = \sqrt{NkT/Mb^2}$ หรือ $\omega = \sqrt{g/b}$

- f) สมมติให้หลังชนลูกสูบมีความเร็ว v' ในทิศทางเดิม เราสามารถเขียนสมการกฏอนุรักษ์โมเมนตัม

$$mu_x + Mv = Mv' - mu'_x$$

และสมการสำหรับการชนแบบยืดหยุ่น

$$u_x - u'_x = v + v'$$

โดยการกำจัด v' เราจะได้อัตราเร็วของอนุภาคหลังชน

$$u'_x = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)u_x - \left(\frac{2M}{M+m}\right)v$$

เนื่องจาก $M \gg m$ เราจะได้

$$u'_x = u_x - 2v$$

หมายเหตุ นักเรียนสามารถใช้สมการ $u_x - u'_x = v + v'$ และประมาณให้ $v' = v$ เพื่อได้คำตอบ $u'_x = u_x - 2v$

จากนั้นเราสามารถหาขนาดของการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคได้จาก

$$\begin{aligned}
 \Delta p_x &= m(u_x + u'_x) \\
 &= m(2u_x - 2v) \\
 &= 2m(u_x - v)
 \end{aligned}$$

- g) จากสมการความดันไดนามิก

$$P' = P \left(1 - \frac{8}{\pi} \frac{v}{v_g}\right)$$

เมื่อเราแทน $v(x)$ จากข้อ c) จะได้

$$P' = P \left(1 - \frac{8}{\pi v_g} \sqrt{\frac{2NkT}{M} \ln\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$$

แรงที่กระทำบนลูกสูบคือ $F' = P'A$ หรือ

$$\begin{aligned} F' &= PA \left(1 - \frac{8}{\pi v_g} \sqrt{\frac{2NkT}{M}} \ln\left(\frac{x}{a}\right) \right) \\ &= \frac{NkT}{x} \left(1 - \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \sqrt{\frac{2NkT}{M}} \ln\left(\frac{x}{a}\right) \right) \quad \left(v_g = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \right) \\ &= \frac{NkT}{x} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{M}} \sqrt{\ln\left(\frac{x}{a}\right)} \right) \quad (mN = M_{gas}) \end{aligned}$$

งานของแรง F' ที่กระทำบนลูกสูบเมื่อเคลื่อนที่จาก $x = a$ ไปยัง $x = 2a$ คือ

$$\begin{aligned} W'_{2a} &= \int_a^{2a} F' dx \\ &= NkT \left(\int_a^{2a} \frac{1}{x} dx - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{M}} \int_a^{2a} \frac{1}{x} \sqrt{\ln\left(\frac{x}{a}\right)} dx \right) \end{aligned}$$

เทอมแรกในด้านขวามือของสมการคือ $NkT \ln 2$ จากนั้นคำนวณหา $\int_a^{2a} x^{-1} \sqrt{\ln(x/a)} dx = \int_1^2 z^{-1} \sqrt{\ln z} dz = 2(\ln 2)^{3/2}/3$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} W'_{2a} &= NkT \ln 2 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{M}} NkT \cdot \frac{2}{3} (\ln 2)^{3/2} \\ &= W_{2a} - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{M}} W_{2a} \quad (W_{2a} = NkT \ln 2) \\ &= W_{2a} \left(1 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{M}} \right) \end{aligned}$$

$\eta_1 \approx 1.25$

h) จากกฎของนิวตัน $M\ddot{x} = -Mg + P'A$ เมื่อใช้ $P' = P(1 - 8v/\pi v_g)$ เราสามารถหาความเร่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g + \frac{PA}{M} \left(1 - \frac{8}{\pi} \frac{\dot{x}}{v_g} \right) \\ &= -g + \frac{NkT}{Mx} - \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{m}{kT}} \frac{NkT}{Mx} \dot{x} \quad \left(PA = F = \frac{NkT}{x}, v_g = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \right) \end{aligned}$$

เมื่อเขียน $x = b + \delta$ เราสามารถทำการประมาณ

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{b + \delta} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\delta}{b} \right)^{-1} \approx \frac{1}{b} - \frac{\delta}{b^2} \quad (\text{เหมือนในข้อ e})$$

และ

$$\frac{1}{x} \dot{x} = \frac{1}{b + \delta} \dot{\delta} = \left(\frac{1}{b} - \frac{\delta}{b^2} \right) \dot{\delta} \approx \frac{1}{b} \dot{\delta}$$

ดังนั้นสมการความเร่งจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} &= \underbrace{-g + \frac{NkT}{Mb}}_{=0} - \frac{NkT}{Mb^2} \delta - \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{m}{kT}} \frac{NkT}{Mb} \dot{\delta} \\ &= -\frac{NkT}{Mb^2} \delta - \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{NkT}} \frac{NkT}{Mb} \dot{\delta} \quad \left(m = \frac{M_{gas}}{N} \right) \\ &= -\frac{NkT}{Mb^2} \delta - 2 \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_{gas}}{M}}}_{\gamma} \underbrace{\sqrt{\frac{NkT}{Mb^2}}}_{\omega} \dot{\delta} \end{aligned}$$

เมื่อเราให้ $\omega = \sqrt{NkT/Mb^2}$ และ $\gamma = \underbrace{\sqrt{2/\pi}}_{\eta_z \approx 0.798} \sqrt{M_{gas}/M}$ สมการจะอยู่ในรูปของ $\ddot{\delta} + 2\gamma\omega\dot{\delta} + \omega^2\delta = 0$

0 ลูกสูบเคลื่อนที่ภายใต้แรงดึงกลับเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลและมีแรงต้านแปรผันตรงกับความเร็วยกของลูกสูบ

- i) ประมวลให้ $\delta(t) = A(t) \sin \omega t$ เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอันดับสองได้ดังนี้

$$\dot{\delta} = \dot{A} \sin \omega t + \omega A \cos \omega t$$

$$\ddot{\delta} = \ddot{A} \sin \omega t + 2\omega \dot{A} \cos \omega t - \omega^2 A \sin \omega t$$

เมื่อนำ δ , $\dot{\delta}$ และ $\ddot{\delta}$ แทนลงในสมการการเคลื่อนที่ $\ddot{\delta} + 2\gamma\omega\dot{\delta} + \omega^2\delta = 0$ จะได้

$$\ddot{A} \sin \omega t + 2\omega \dot{A} \cos \omega t - \omega^2 A \sin \omega t + 2\gamma\omega(\dot{A} \sin \omega t + \omega A \cos \omega t) + \omega^2 A \sin \omega t = 0$$

แยกเทอมต่าง ๆ ในด้านซ้ายมือออกเป็นเทอมที่มี $\cos \omega t$ และมี $\sin \omega t$

$$(2\omega \dot{A} + 2\gamma\omega^2 A) \cos \omega t + (\ddot{A} + 2\gamma\omega \dot{A}) \sin \omega t = 0$$

$$2\omega(\dot{A} + \gamma\omega A) \cos \omega t + (\ddot{A} + 2\gamma\omega \dot{A}) \sin \omega t = 0$$

เนื่องจากด้านขวามือเป็นศูนย์ตลอดเวลา สัมประสิทธิ์ของ $\cos \omega t$ และมี $\sin \omega t$ ต้องมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อพิจารณาสัมประสิทธิ์ของ $\cos \omega t$ เราจะได้สมการอนุพันธ์ $\dot{A} + \gamma\omega A = 0$ และสามารถอินทิเกรตโดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ได้คำตอบคือ $A(t) = A_0 e^{-\gamma\omega t}$

แต่ถ้าเริ่มต้นด้วยสัมประสิทธิ์ของ $\sin \omega t$ นั้นจะได้ $\ddot{A} + 2\gamma\omega \dot{A} = 0$ หรือ $\ddot{A} + 2\gamma\omega \dot{A} = 0$ ค่าคงที่ ซึ่งสมการนี้จะไม่สะดวกในการคิดต่อไป นอกจากนั้นการมีเลข 2 อยู่อาจจะขัดแย้งกับสัมประสิทธิ์ของ $\cos \omega t$ ว่าเป็นศูนย์พร้อมกันไม่ได้ แต่หากเรานำคำตอบ $A(t) = A_0 e^{-\gamma\omega t}$ มาแทนค่าจะพบว่าสัมประสิทธิ์หน้า $\sin \omega t$ ติดค่า γ^2 ซึ่งมีค่าน้อยใกล้ศูนย์ ทำให้สามารถละทิ้งทั้งเทอมของ $(\ddot{A} + 2\gamma\omega \dot{A}) \sin \omega t$ ได้สำหรับการประมาณนี้

หมายเหตุ ในการแก้ปัญหา damped oscillations โดยทั่วไป เราอาจยังไม่ simplify $\gamma \rightarrow 0$ ตั้งแต่แรก และใช้คำตอบ $\delta(t) = A(t) \sin(\Omega t + \phi)$ แทนลงในสมการการเคลื่อนที่ $\ddot{\delta} + 2\gamma\omega\dot{\delta} + \omega^2\delta = 0$ จะได้ $A(t) = A_0 e^{-\gamma\omega t}$ และ $\Omega = \omega\sqrt{1 - \gamma^2}$ และกรณี $\gamma \rightarrow 0$ จะได้ $\Omega \rightarrow \omega$

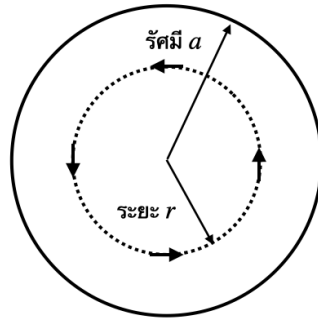
- j) จาก $\delta(t) = A(t) \sin \omega t$ และ $A(t) = A_0 e^{-\gamma \omega t}$ เมื่อเวลาผ่านไปนานจะได้ $A = 0$ และ $\delta = 0$ ดังนั้น $x = b + \delta = b$

***** จบเฉลยข้อ 1 *****

ข้อที่ 2 Nuclear Fusion with Z-pinch

[10 คะแนน]

a) SOLUTION



รูปที่ 2.1 รูปแสดงเส้นแรงแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไฟฟ้าที่ไหลในทิศทางพุ่งออกจากกระดาด

สมมติให้กระแสไฟฟ้าไหลในทิศทางพุ่งออกจากกระดาด ที่ระยะรัศมี r จากแกนกลางของลำพลาสมาจะมีเส้นแรงแม่เหล็กเป็นรูปวงกลม มีทิศทางวนเข็มนาฬิกา โดยสนามแม่เหล็กจะอยู่ในทิศสัมผัสกับวงกลมดังที่แสดงในรูปที่ 2.1 จากสมมาตรความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก B ที่ระยะ r จะมีขนาดคงที่ นักเรียนสามารถหาความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก B ได้จากกฎของแอมแปร์

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \Sigma I_{\text{enclosed}} \quad \text{สมการที่ a.1}$$

เส้นทางการอินทิเกรตคือเส้นทางที่เป็นรูปวงกลมรัศมี r และอินทิเกรตในทิศทางวนเข็มนาฬิกา ผลการอินทิเกรตของพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการที่ 1 คือ

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B)(2\pi r) \quad \text{สมการที่ a.2}$$

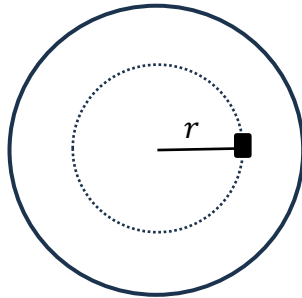
ในส่วนองกระแสไฟฟ้าที่อยู่ภายในวงปิดของการอินทิเกรตตามเส้นทางมีค่าเท่ากับ

$$I_{\text{enclosed}} = \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = \frac{I}{a^2} r^2 \quad \text{สมการที่ a.3}$$

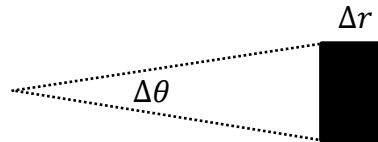
แทนค่าทั้งหมดลงในสมการที่ 1 แล้วทำการจัดรูปสมการเพื่อหาความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก B จะได้

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \quad \text{สมการที่ a.4}$$

b) SOLUTION



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.2 ส่วนเล็กๆ พื้นที่สี่เหลี่ยม

พื้นที่สี่เหลี่ยมกว้าง $r\Delta\theta$ หนา Δr จึงมีพื้นที่ $\Delta A = r\Delta\theta\Delta r$

กระแสตามแนวของลําดำสมาที่ไหลผ่านพื้นที่นี้ จึงเท่ากับ

$$\Delta I = \frac{I}{\pi a^2} \times r\Delta\theta\Delta r = \frac{Ir}{\pi a^2} \Delta r\Delta\theta \quad \text{สมการที่ b.1}$$

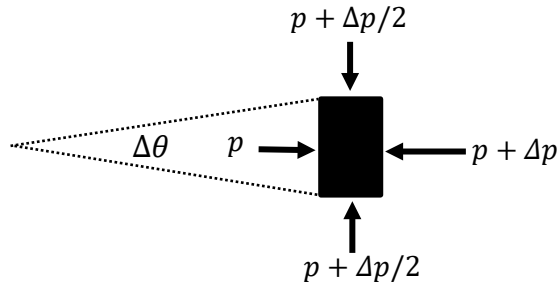
จากสมการ

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{สมการที่ b.2}$$

เราจะได้นขนาดของแรงเป็น

$$\Delta F = \frac{Ir}{\pi a^2} \Delta r\Delta\theta \times \Delta \ell \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r^2 \Delta r\Delta\ell\Delta\theta \quad \text{สมการที่ b.3}$$

c) SOLUTION



รูปที่ 2.3 รูปแสดงแรงที่เกิดจากความดันของพลาสมา

แรงดันเกิดจากความดันคุณสมบัติ

$$\Delta F = p\Delta A$$

สมการที่ c.1

แรงดันที่แนวบนล่างของรูป 2.3 จึงหักล้างกันหมดไป

สมการที่ c.2

$$\text{แรงดันบนพื้นที่หน้าตัดซ้าย} = pr\Delta\theta\Delta\ell$$

สมการที่ c.3

$$\text{แรงดันบนพื้นที่หน้าตัดขวา} = (p + \Delta p)r\Delta\theta\Delta\ell$$

สมการที่ c.4

จากเงื่อนไขของสมดุลตามแนวรัศมีระหว่างแรงเนื่องจากความดันและแรงแม่เหล็กจะได้ว่า

$$pr\Delta\theta\Delta\ell = (p + \Delta p)r\Delta\theta\Delta\ell + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r^2 \Delta r \Delta\ell \Delta\theta$$

สมการที่ c.5

$$r\Delta p = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r^2 \Delta r$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r$$

การใส่ลิมิต

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta r} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r$$

สมการที่ c.6

จะได้คำตอบสุดท้ายเป็น

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r$$

สมการที่ c.7

(หมายเหตุ: สามารถเลือกปริมาตรเป็นส่วนหนึ่งของวงแหวนหนา Δr แต่ทิศของแรงทั้ง 4 ด้านมีความซับซ้อนเพิ่มขึ้น โดยเฉพาะแรงด้านข้างที่ทำมุมเล็กๆ กับเส้นสัมผัสวงกลม เมื่อทำการ balance แรงแล้วจะได้คำตอบเท่ากัน)

d) SOLUTION

ทำการแก้สมการที่ c.7 ด้วยการอินทิเกรตเทียบรัศมี r ทั้งสองข้างของสมการและจำกัดขอบเขตโดยให้ที่ระยะ $r = a$ ค่าความดันของพลาสมามีค่าเท่ากับ $p(a) = 0$

$$\begin{aligned}\int_p^0 \frac{dp}{dr} dr &= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} \int_r^a r dr \\ p|_p^0 &= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} \frac{r^2}{2} \Big|_r^a \\ 0 - p &= -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} (a^2 - r^2) \\ p &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} (a^2 - r^2) \end{aligned} \quad \text{สมการที่ d.1}$$

e) SOLUTION

จากสมการที่ d.1 ความดันนั้นขึ้นอยู่กับระยะห่างจากแกน r เท่านั้น โดยไม่ขึ้นกับความยาวของลำพลาสมาและมุม θ ดังนั้นความดันจะมีค่าเท่ากับตลอดแผ่นทรงกระบอกบางรัศมี r หนา Δr ปริมาตร ΔV ของแผ่นทรงกระบอกบางจะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta V = 2\pi r \ell \Delta r \quad \text{สมการที่ e.1}$$

ดังนั้นค่า $\int p dV$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\int p dV &= \int_0^a \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} (a^2 - r^2) \times 2\pi r \ell dr \\ \int p dV &= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi a^4} \int_0^a (a^2 r - r^3) dr \\ \int p dV &= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi a^4} \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \\ \int p dV &= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{8\pi} \end{aligned} \quad \text{สมการที่ e.2}$$

ปริมาตรทั้งหมดมีค่าเท่ากับ

$$V = \pi a^2 \ell \quad \text{สมการที่ e.3}$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของความดันมีค่าเท่ากับ

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{8\pi} \times \frac{1}{\pi a^2 \ell}$$

$$\langle p \rangle = \frac{\beta I^2}{4a^2} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$$

สมการที่ e.4

f) SOLUTION

พิจารณานิวเคลียสไฮโดรเจนเคลื่อนที่เข้าชนกัน ในการเกิดฟิวชันพลังงานจลน์ของนิวเคลียสทั้งสองจะต้องทำให้นิวเคลียสทั้งสองเข้าใกล้กันในระดับ 100 เฟมโตเมตร ถึงจะเริ่มเกิดปฏิกิริยาฟิวชัน ดังนั้นพลังงานจลน์ของนิวเคลียสทั้งสองจึงประมาณเท่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าระหว่างนิวเคลียสทั้งสองเมื่อเคลื่อนที่มาหยุดใกล้กัน

ที่อุณหภูมิ T พลังงานจลน์เฉลี่ยของนิวเคลียสจะเท่ากับ $\langle KE \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

จากที่กล่าวมา เราจะเขียนสมการได้ว่า

$$2 \times \frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

สมการที่ f.1

$$T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B r}$$

สมการที่ f.2

$$T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(3)(1.38 \times 10^{-23})(100 \times 10^{-15})} = 5.56 \times 10^7 \text{ K}$$

g) SOLUTION

หาความดันเฉลี่ยของพลาสมาโดยสมมติให้พลาสมามีพฤติกรรมเหมือนแก๊สอุดมคติ ดังนั้นความดันเฉลี่ยหาจาก

$$PV = NkT$$

สมการที่ g.1

แทนปริมาตรของลำพลาสมาเป็น $V = \pi a^2 \ell$ ลงในสมการที่ g.1 จะได้

$$P\pi a^2 \ell = NkT$$

$$P\pi a^2 = \frac{N}{\ell} kT$$

สมการที่ g.2

เปลี่ยนหน่วยของรัศมีและความหนาแน่นเชิงเส้น

$$a = 0.1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{N}{\ell} = 2 \times 10^{17} \times 10^2 \text{ m}^{-1}$$

แทนค่ารัศมี ความหนาแน่นเชิงเส้น และอุณหภูมิจะได้ความดันเฉลี่ยเท่ากับ

$$P = \frac{(2 \times 10^{19}) \times (1.38 \times 10^{-23}) \times (5.559 \times 10^7)}{\pi \times (10^{-4})^2} = 4.8838 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

สังเกตว่าจำนวนอนุภาคในลำพลาสมาเป็น 2 เท่าของจำนวนอิเล็กตรอนเนื่องจากภายในลำพลาสมาประกอบด้วยจำนวนไอออนบวกและอิเล็กตรอนเท่า ๆ กัน

แทนความดันเฉลี่ยนี้ลงในสมการความดันเฉลี่ย $\langle p \rangle = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$ เพื่อหากระแสไฟฟ้า

$$I^2 = \frac{8\pi^2 \times (10^{-4})^2 \times (4.8838 \times 10^{11})}{4\pi \times 10^{-7}} = 3.0685 \dots \times 10^{11} \text{ A}^2$$

$$I = \frac{140}{\sqrt{\beta}} = 5.5 \times 10^5 \text{ A}$$

***** จบเฉลยข้อ 2 *****

ข้อที่ 3 สมบัติของสสาร

[10 คะแนน]

a) SOLUTION

พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีขนาดโมเมนตัม p คือ

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e}$$

และจากความสัมพันธ์ของเดอบรอยล์ $p = h/\lambda$ จะได้ว่า

$$E_k = \frac{h^2}{2m_e \lambda^2}$$

และเนื่องจากอิเล็กตรอนถูกกักขังอยู่ในรัศมี r ทำให้ $\lambda = \eta r$ และพลังงานจลน์จะได้เป็น

$$E_k = \frac{h^2}{2m_e \eta^2 r^2}$$

b) SOLUTION

พลังงานรวมของอะตอมไฮโดรเจนมาจากพลังงานจลน์ของโปรตอนและอิเล็กตรอนและพลังงานศักย์ไฟฟ้า

แต่เนื่องจากโปรตอนหนักกว่าอิเล็กตรอนมาก ค่าพลังงานจลน์ของโปรตอนจึงมีค่าน้อยมากไม่นำมาคิด

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{h^2}{2m_e \lambda^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{h^2}{2m_e \eta^2 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

c) SOLUTION

พลังงานรวมน้อยสุดเกิดขึ้นเมื่อ $\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_{min}} = 0$ จะได้ว่า

$$\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_{min}} = -\frac{2h^2}{2m_e \eta^2 r_{min}^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{min}^2} = 0$$

$$r_{min} = \frac{4\pi}{\eta^2} \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2} \right)$$

เมื่อ $r_{min} = a_0$ จะได้ว่า

$$\frac{4\pi}{\eta^2} \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2} \right)$$

$$\eta = 2\pi$$

ใช้ค่าบวกเท่านั้นเพราะความยาวเป็นบวก

d) SOLUTION

จากข้อ c และ $\eta = 2\pi$ จะได้ว่าค่าพลังงานรวมน้อยสุดคือ

$$E = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e a_0^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} - \frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 h^2} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

ดังนั้น

$$R_y = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$$

e) SOLUTION

เนื่องจาก $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$ จะได้ว่าพลังงานจลน์ในรูปของ V คือ

$$E_k = \frac{h^2}{2m_e \eta^2 r^2} = \frac{h^2}{2m_e \eta^2 \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3}} = \frac{h^2}{2m_e (2\pi)^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3}} V^{-2/3}$$

ดังนั้นความดัน P_s มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} P_s &= -\frac{d}{dV} \left(\frac{h^2}{2m_e (2\pi)^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3}} V^{-2/3} \right) = \frac{h^2}{3m_e (2\pi)^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3}} V^{-5/3} \\ &= \frac{h^2}{3m_e (2\pi)^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)^{-5/3}} = \frac{1}{16\pi^3} \frac{h^2}{m_e r^5} \end{aligned}$$

แทนค่า $r = a_0 = 0.529$ อังสตรอม จะได้

$$P_s = 2.3 \times 10^{12} \text{ Pa}$$

f) SOLUTION

เราสามารถแบ่งผลึกออกเป็นลูกบาศก์ขนาดเล็กที่มีความยาวด้านละ $2fa_0$ ลูกบาศก์นี้จะครอบโมเลกุลได้หนึ่งโมเลกุลพอดี ดังนั้นค่าความหนาแน่นคือ

$$\rho = \frac{Am_p}{(2fa_0)^3} = \frac{Am_p}{8f^3 a_0^3}$$

g) SOLUTION

จากข้อ f) และ $f \approx 1.5 A^{1/5}$ จะได้ว่า

$$\rho = \frac{Am_p}{(2fa_0)^3} = \frac{Am_p}{8 \left(1.5 A^{1/5}\right)^3 a_0^3} = \frac{A^{2/5} m_p}{27 a_0^3}$$

แทนค่า $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ และ $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ จะได้

$$\rho = 0.4 A^{2/5} \text{ g/cm}^3$$

จะเห็นว่าค่าความหนาแน่นของผลึกขึ้นอยู่กับมวลในหน่วยประมาณ 1 ถึง 10 g/cm^3

h) SOLUTION

เรารู้ว่า

- ซิลิกอนไดออกไซด์ 1 โมเลกุลหนัก $60m_p$
- $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$
- $1 R_y = 13.6 \text{ eV}$

ดังนั้นค่าความร้อนแฝงในการหลอมเหลวต่อโมเลกุลของซิลิกอนไดออกไซด์คือ

$$E_1 = \left(\frac{156 \times 10^3 \text{ J}}{\text{kg}} \right) \left(\frac{60 m_p}{1 \text{ molecule}} \right) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) \left(\frac{1 R_y}{13.6 \text{ eV}} \right)$$

$$E_1 = 0.0072 R_y/\text{molecule}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\beta = 0.0072$$

i) SOLUTION

พลังงานในการนำซิลิกอนไดออกไซด์ 1 โมเลกุลขึ้นสู่ยอดเขามีค่าเท่ากับ $Am_p g H_E$ ซึ่งมีค่าเท่ากับพลังงานที่ใช้ในการหลอมเหลวของซิลิกอนไดออกไซด์ βR_y ดังนั้น จะได้ว่า

$$Am_p g H_E = \beta R_y$$

$$H_E = \frac{\beta R_y}{Am_p g}$$

j) SOLUTION

แทนค่าจะได้ว่า

$$H_E = \frac{\beta R_y}{Am_p g} = \frac{(0.0072)(13.6 \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ J})}{(60)(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 16 \text{ km}$$

k) SOLUTION

ค่า g ของโลกมีค่าเท่ากับ

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

โดยที่ M_E และ R_E คือมวลและรัศมีของโลกตามลำดับ เราสามารถเขียนค่า g ให้อยู่ในรูปของค่าคงตัวสากล และ N_E, A, f ได้ดังนี้

เนื่องจากโปรตอนและนิวตรอนมีมวลพอๆกัน เราสามารถประมาณมวลของทั้งคู่เป็น m_p ทำให้ได้

$$M_E = N_E m_p$$

เนื่องจากเราประมาณว่าโลกประกอบจากผลึกซิลิกอนไดออกไซด์ ดังนั้น รัศมีของโลกหาได้จาก

$$\rho_E \left(\frac{4}{3} \pi R_E^3 \right) = M_E = N_E m_p$$

จากข้อ f เราได้ว่า $\rho_E = \frac{Am_p}{(2fa_0)^3}$ ดังนั้น

$$\rho_E \left(\frac{4}{3} \pi R_E^3 \right) = \frac{Am_p}{(2fa_0)^3} \left(\frac{4}{3} \pi R_E^3 \right) = N_E m_p$$

$$R_E^3 = \frac{6}{\pi} \frac{N_E (fa_0)^3}{A}$$

$$R_E = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N_E}{A}\right)^{\frac{1}{3}} f a_0$$

ดังนั้นค่า g เท่ากับ

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} = \frac{GN_E m_p}{\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N_E}{A}\right)^{\frac{2}{3}} f^2 a_0^2} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{N_E^{\frac{1}{3}} A^{\frac{2}{3}} G m_p}{f^2 a_0^2}$$

จะได้ว่า

$$\frac{H_E}{a_0} = \frac{\beta R_y}{A m_p g a_0} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\beta f^2}{N_E^{\frac{1}{3}} A^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 G m_p^2}\right)$$

โดยที่ $R_y = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$ และ $a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$

I) SOLUTION

จากข้อก่อนหน้าเราจะได้ว่า

$$\frac{H_M}{H_E} = \left(\frac{\beta_M}{\beta_E}\right) \left(\frac{f_M}{f_E}\right)^2 \left(\frac{A_E}{A_M}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{N_E}{N_M}\right)^{\frac{1}{3}}$$

เนื่องจากโลกและดาวอังคารประกอบจากผลึกซิลิกอนไดออกไซด์เหมือนกันทำให้

$$\beta_M = \beta_E, f_M = f_E, A_M = A_E$$

และค่า $N_E = \frac{M_E}{m_p}, N_M = \frac{M_M}{m_p}$ ดังนั้น

$$\frac{H_M}{H_E} = \left(\frac{N_E}{N_M}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{M_E}{M_M}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.1$$