

แรงเสียดทานจากการหมุน (Rolling Friction)

[20 คะแนน]

Solution & Marking Scheme

ตอนที่ 1

[5.3 คะแนน]

1.a บันทึกผลการทดลอง

ระยะห่างระหว่างราง $L = 2.00$ cm

ระยะการกลิ้ง $s = 60.0$ cm

(ตอนที่ 1 ไม่วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน)



การเปลี่ยนมุม θ

- เลื่อนฐานรองรางเข้าออก หรือเพิ่มจำนวนฐานรองรางเพื่อปรับ θ

การวัดมุม θ

- อ่านมุม θ จากแนวเส้นเอ็นโดยใช้ offset ที่ 90 องศา

การคำนวณความเร่ง a

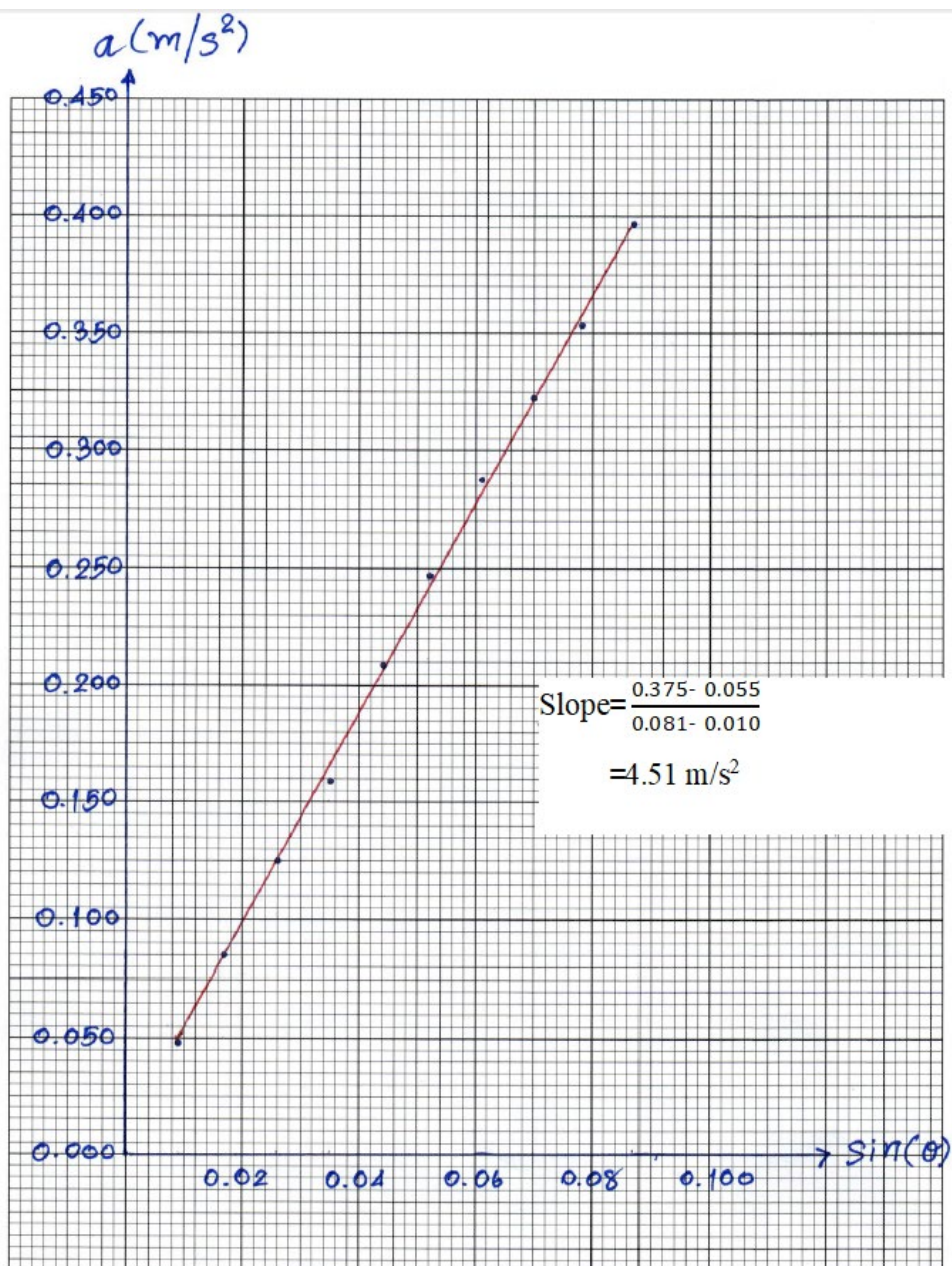
- จับเวลาที่ลูกเหล็กกลิ้งลงมา 3 ครั้งแล้วเฉลี่ยได้ $\bar{t}$
- คำนวณอัตราเร่งจาก $a = 2s/(\bar{t})^2$

หมายเหตุ:

- ไม่จำเป็นต้องทำให้พื้นโต๊ะอยู่ในแนวเดียวกับพื้นราง มุมที่อ่านได้จากไม้โปรแทรกเตอร์คือมุมที่รางทำมุม θ กับพื้นราบอยู่แล้ว

มุมเอียง θ (องศา)	เวลา (s) ครั้งที่ 1	เวลา (s) ครั้งที่ 2	เวลา (s) ครั้งที่ 3	$\bar{t}$ (s)	$\sin \theta$	a (m/s ²)
0.50	5.15	5.03	5.03	5.07	0.0087	0.047
1.00	3.75	3.75	3.75	3.75	0.0175	0.085
1.50	3.09	3.13	3.09	3.10	0.0262	0.125
2.00	2.78	2.72	2.75	2.75	0.0349	0.159
2.50	2.41	2.37	2.41	2.40	0.0436	0.209
3.00	2.19	2.19	2.25	2.21	0.0523	0.246
3.50	2.07	2.00	2.06	2.04	0.0610	0.287
4.00	1.94	1.91	1.94	1.93	0.0698	0.322
4.50	1.81	1.84	1.87	1.84	0.0785	0.354
5.00	1.72	1.75	1.75	1.74	0.0872	0.396

1.b การคำนวณและการวาดกราฟ



1.c การคำนวณค่า ϵ_1 จากกราฟเส้นตรง

สมการที่ใช้คำนวณ ϵ_1

จากสมการ $a = \frac{g}{\epsilon_1 + 1} \sin \theta$ โดยที่ $g = 9.78 \text{ m/s}^2$

ความชันจากกราฟคือ $\frac{g}{\epsilon_1 + 1}$ จากความชันจะสามารถคำนวณ ϵ_1 ได้

ค่า ϵ_1 จากการทดลอง

จากการลากเส้นแนวโน้มบนกราฟได้

ความชัน $\frac{g}{\epsilon_1 + 1} = 4.51 \text{ m/s}^2$ คำนวณได้ $\epsilon_1 = \frac{9.78}{4.51} - 1 = 1.17$

หมายเหตุ

ในทางทฤษฎี $\epsilon_1 = \frac{I_{cm}}{MR^2} k^2$ เมื่อ $k = R/\sqrt{R^2 - (L^2/4)}$

รัศมีของลูกเหล็กที่ใช้ $R = 1.25 \text{ cm}$

คำนวณได้ $\epsilon_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1.25}{\sqrt{1.25^2 - \frac{2.0^2}{4}}} = 1.11$

ตอนที่ 2

[9.5 คะแนน]

2.a. บันทึกผลการทดลองและการคำนวณ

ระยะทางระหว่างราง $L = 2.50 \text{ cm}$

ระยะการกลิ้ง $s = 60.0 \pm 0.5 \text{ cm}$

ขั้นตอนทำการทดลองเหมือนตอนที่ 1 แต่เปลี่ยนใช้ลูกยางแทนลูกเหล็ก

ตารางบันทึกผลมุม θ และคำนวณ a

มุมเอียง θ (องศา)	มุมเอียง θ (rad)	เวลา (s) ครั้งที่ 1	เวลา (s) ครั้งที่ 2	เวลา (s) ครั้งที่ 3	$\bar{t}$ (s)	a (m/s ²)
2.0 ± 0.1	0.035	4.56	4.47	4.57	4.53	0.058
2.4 ± 0.1	0.042	3.75	3.69	3.72	3.72	0.087
2.7 ± 0.1	0.047	3.40	3.40	3.25	3.35	0.107
3.2 ± 0.1	0.056	2.97	2.94	2.97	2.96	0.137
3.5 ± 0.1	0.061	2.75	2.82	2.75	2.77	0.156
3.9 ± 0.1	0.068	2.59	2.53	2.57	2.56	0.183
4.2 ± 0.1	0.073	2.44	2.47	2.47	2.46	0.198
4.6 ± 0.1	0.080	2.31	2.31	2.28	2.30	0.227
5.0 ± 0.1	0.087	2.16	2.22	2.15	2.18	0.253
5.4 ± 0.1	0.094	2.13	2.10	2.09	2.11	0.270

2.b. การคำนวณค่าคลาดเคลื่อนของ Δx และ Δy

การ plot กราฟเส้นตรง

$$\text{จากสมการ } a \approx \frac{g}{\epsilon_2 + 1} \theta - \frac{gk}{\epsilon_2 + 1} \left(\frac{d}{R} \right)$$

ตัวแปรสำหรับแกน $x = \theta$

ตัวแปรสำหรับแกน $y = a$

การคำนวณ error bar ของแกน x

เป็นความคลาดเคลื่อนจากการวัดมุม ดังนั้น $\Delta x = \Delta \theta = 0.1^\circ$ หรือ $= \frac{\pi}{180} \times 0.1 = 0.002 \text{ rad}$

ทั้งนี้การใช้แว่นขยายจะทำให้ช่วยอ่านได้ระดับ $\pm 0.1^\circ$ หรือนักเรียนบางคนอาจจะประมาณครึ่งช่องเล็กสุดเท่ากับ $\pm 0.25^\circ$ ก็ได้

การคำนวณ error bar ของแกน y

$$\text{จาก } a = \frac{2s}{\bar{t}^2} \text{ ดังนั้น } \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{2\Delta \bar{t}}{\bar{t}}$$

(Δs มาจากการวัดเพียงครั้งเดียว ไม่ได้คำนวณเชิงสถิติ ใช้ simple error propagation ได้ หรืออาจจะใช้

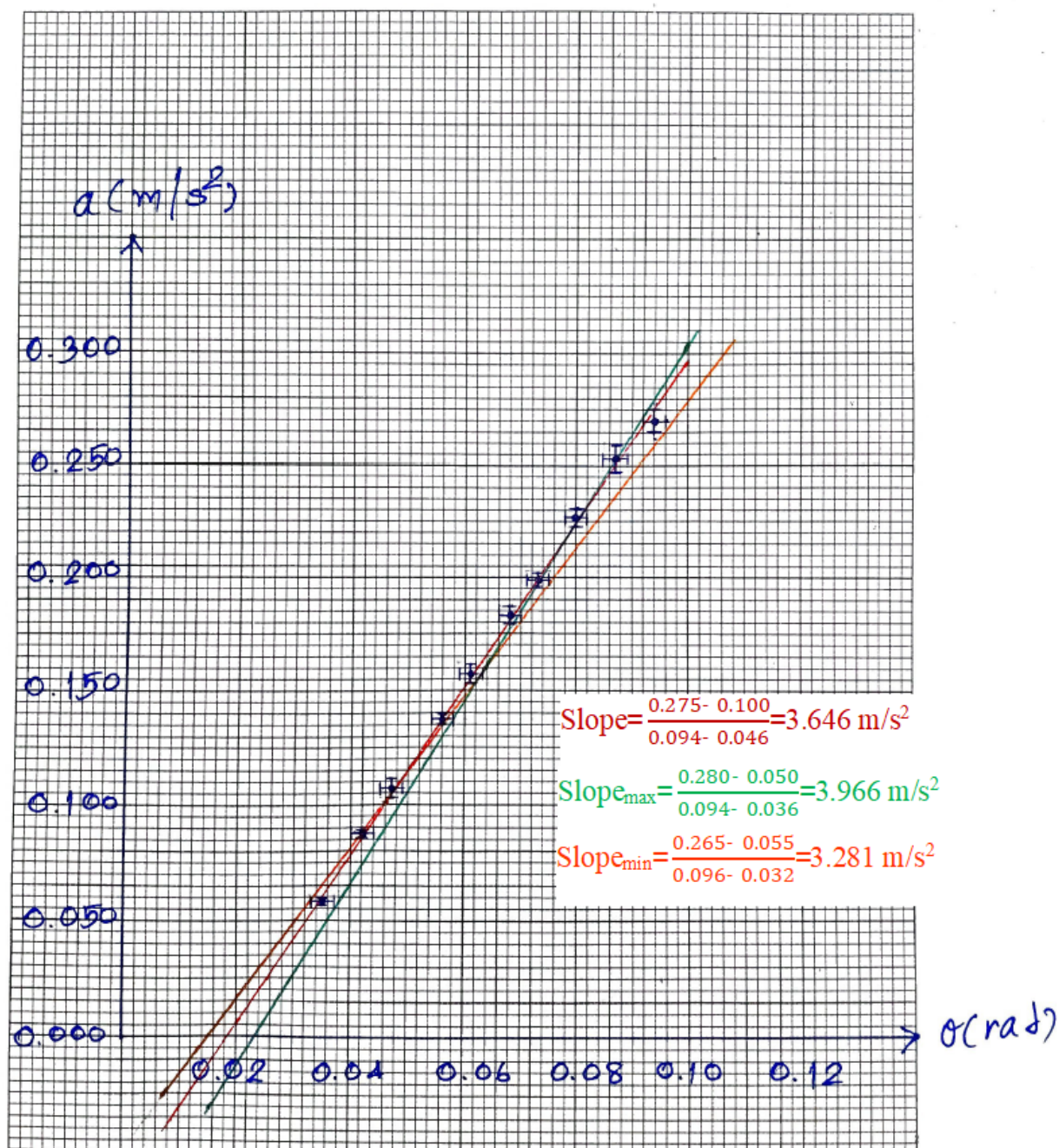
$$\text{quadratic error } \frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta \bar{t}}{\bar{t}} \right)^2} \text{ ก็ได้})$$

ค่าจากการคำนวณ $\Delta \bar{t} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ เมื่อ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{N-1}}$ และเป็น predictable event ทั้งการกด start เมื่อปล่อยลูกเหล็กและกด stop เมื่อได้ระยะ 60 cm ทั้งนี้หากนักเรียนคำนึงถึง human reaction time ยังต้องคำนวณ $\Delta \bar{t} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ เพื่อเปรียบเทียบแล้วเลือก error ที่มากกว่า

ตารางบันทึกค่าคลาดเคลื่อนแต่ละแกน

มุมเอียง θ (องศา)	Δx (องศา หรือ rad)	$\Delta \bar{t}_{\text{random}}$ (s)	Δy (m/s ²)
2.0	0.1° หรือ 0.002 rad	0.032	0.0013
2.4	0.1° หรือ 0.002 rad	0.017	0.0015
2.7	0.1° หรือ 0.002 rad	0.050	0.0041
3.2	0.1° หรือ 0.002 rad	0.010	0.0021
3.5	0.1° หรือ 0.002 rad	0.023	0.0039
3.9	0.1° หรือ 0.002 rad	0.018	0.0040
4.2	0.1° หรือ 0.002 rad	0.010	0.0033
4.6	0.1° หรือ 0.002 rad	0.010	0.0039
5.0	0.1° หรือ 0.002 rad	0.022	0.0072
5.4	0.1° หรือ 0.002 rad	0.012	0.0053

2.c การ plot จุดจากการทดลอง



2.d การคำนวณค่า d/R จากกราฟเส้นตรง

$$\text{จากสมการ } a = \frac{g}{\epsilon_2 + 1} \theta - \frac{g}{\epsilon_2 + 1} \left(\frac{d}{R} \right) k$$

$$\text{ความชัน slope} = \frac{g}{\epsilon_2 + 1} \text{ ดังนั้น } \epsilon_2 = \frac{g}{\text{slope}} - 1$$

$$\text{กราฟ } a \text{ vs. } \theta \text{ จะตัดแกนนอนเมื่อ } a = 0 \text{ จะได้ } \frac{g}{\alpha + 1} \theta_0 = \frac{g}{\alpha + 1} \left(\frac{d}{R} \right) k \text{ หรือ } \theta_0 = \left(\frac{d}{R} \right) k$$

$$\text{คำนวณค่า } k = R / \sqrt{R^2 - \left(\frac{L^2}{4} \right)} = 1.90 \text{ จาก } R = 1.47 \text{ cm และ } L = 2.5 \text{ cm}$$

ลากเส้นแนวโน้มที่ดีที่สุด (least squares error)

$$\text{ได้ slope} = 3.646 \text{ ทำให้ได้ } \epsilon_2 = \frac{g}{\text{slope}} - 1 = 1.68$$

$$\text{ได้ } \theta_0 = 0.0185 \text{ ทำให้ได้ } \frac{d}{R} = \frac{\theta_0}{k} = \frac{0.0185}{1.90} = 0.00974$$

ลากเส้นความชันสูงสุดที่ยังอยู่ภายในกรอบสี่เหลี่ยมของ error bar

$$\text{ได้ slope} = 3.966 \text{ ทำให้ได้ } \epsilon_2 = \frac{g}{\text{slope}} - 1 = 1.47$$

$$\text{ได้ } \theta_0 = 0.0235 \text{ ทำให้ได้ } \frac{d}{R} = \frac{\theta_0}{k} = \frac{0.0235}{1.90} = 0.0124$$

เมื่อลากเส้นความชันต่ำสุดที่ยังอยู่ภายในกรอบสี่เหลี่ยมของ error bar

$$\text{ได้ slope} = 3.281 \text{ ทำให้ได้ } \epsilon_2 = \frac{g}{\text{slope}} - 1 = 1.98$$

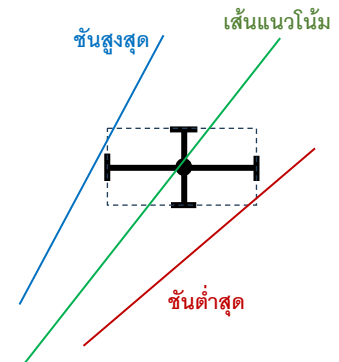
$$\text{ได้ } \theta_0 = 0.0130 \text{ ทำให้ได้ } \frac{d}{R} = \frac{\theta_0}{k} = \frac{0.0130}{1.90} = 0.00684$$

ดังนั้น

$$\epsilon_2 \pm \Delta \epsilon_2 = 1.7 \pm 0.3$$

$$\frac{d}{R} \pm \Delta \frac{d}{R} = 0.0097 \pm 0.0026 \text{ หรือ } 0.010 \pm 0.003$$

หมายเหตุ: การหา d/R จากจุดตัดแกนตั้งนั้นสามารถทำได้

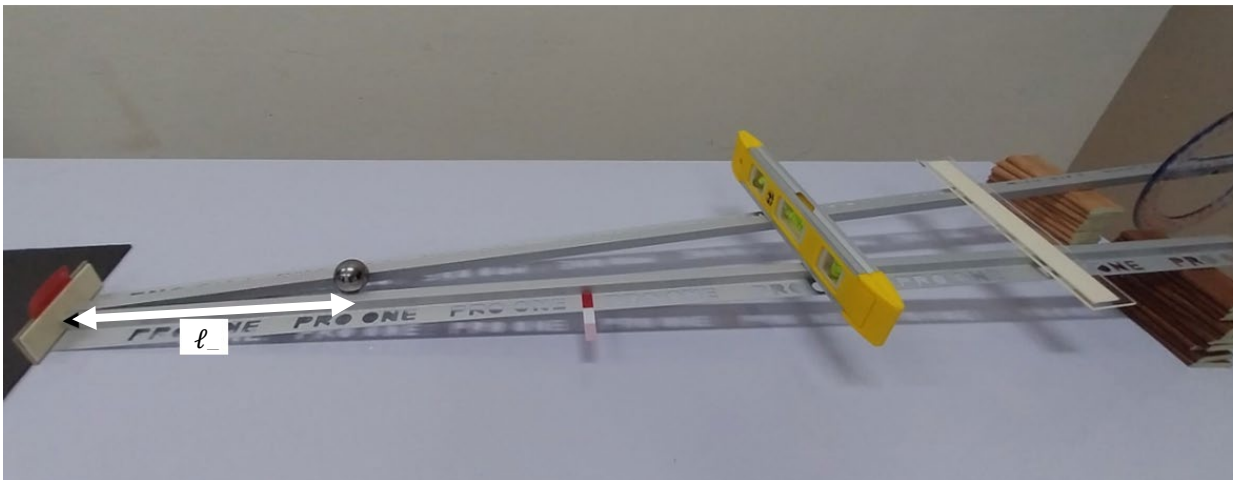


ตอนที่ 3

[5.2 คะแนน]

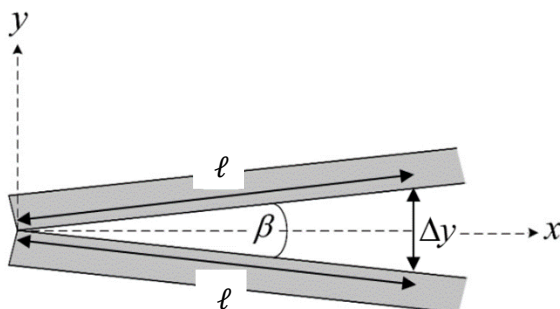
3.a ออกแบบการทดลอง

วาดรูปและอธิบายวิธีทดลองโดยรวม



- นำปลายรางมาบรรจบกันดังรูปและยึดด้วยแผ่นอะคริลิกที่ปลายล่าง
- นำฐานรองรางมาหนุนทั้งสองรางจำนวนเท่าๆกันและวัดมุม θ
- กางรางออกให้ได้มุม β ที่เหมาะสม (สองเท่าของ θ) แล้วยึดด้วยอะคริลิกยาว
- ใช้เครื่องวัดระดับน้ำวัดว่ารางทั้งสองทำมุม θ กับระนาบราบ
- วางลูกเหล็กบนรางไม่ขนาน เปลี่ยนตำแหน่งไปเรื่อยๆ จนกว่าจะพบตำแหน่ง l_{cm} ที่ไม่กลิ้ง (วัดตามแนวราง)
- นำค่าเฉลี่ย l_{cm} สำหรับแต่ละมุม θ มาวาดกราฟเพื่อคำนวณหาค่า C

อธิบายการวัดหรือการคำนวณมุม β



- กำหนดระยะ ℓ ตามแนวราง และติดสติ๊กเกอร์สีทั้งสองข้าง
- ใช้ไม้บรรทัดวัดระยะ Δy ระหว่างสติ๊กเกอร์สี
- หามุม β ได้จาก $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\Delta y}{2\ell}$

อธิบายการวัด x_{cm}

- บันทึกตำแหน่งที่ไม่กลิ้งด้วยระยะ ℓ_{cm} ซึ่งเป็นระยะตามแนวรางจากจุดกำเนิดถึงแนวของจุดศูนย์กลางมวล
- หาระยะ ℓ_{cm} ที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของแต่ละมุม θ
- หาระยะ $x_{cm} \approx \ell_{cm}$ เนื่องจากมุมมีค่าน้อย หรือคำนวณ $x_{cm} = \ell_{cm} \cos^2 \theta$ โดยตรง
- หาค่าเฉลี่ย $\bar{x}_{cm}$ จาก $(\ell_{cm}^{\max} + \ell_{cm}^{\min})/2$

3.b บันทึกผลการทดลอง

มุม θ (องศา)	$1/\tan \theta$	$\ell_{\text{cm}}^{\text{min}}$ (cm)	$\ell_{\text{cm}}^{\text{max}}$ (cm)	$\bar{x}_{\text{cm}} = \frac{\ell_{\text{cm}}^{\text{min}} + \ell_{\text{cm}}^{\text{max}}}{2}$ (cm)
1.2	47.7	37.5	44.5	41.00
2.0	28.6	24.5	26.5	25.50
3.1	18.5	16.2	16.5	16.35
4.5	12.7	11.0	11.4	11.20
5.0	11.4	10.3	10.5	10.40

3.c การวาดกราฟ

จากสมการ $\frac{x_{\text{cm}}}{R} \tan \theta = C$

ใช้การประมาณ $x_{\text{cm}} = \ell_{\text{cm}} \cos^2 \theta \approx \ell_{\text{cm}}$ สำหรับการทดลองในช่วงมุมน้อยๆ

กราฟ ℓ_{cm} vs. $\frac{1}{\tan \theta}$ จะมีความชัน $\text{slope} = CR$

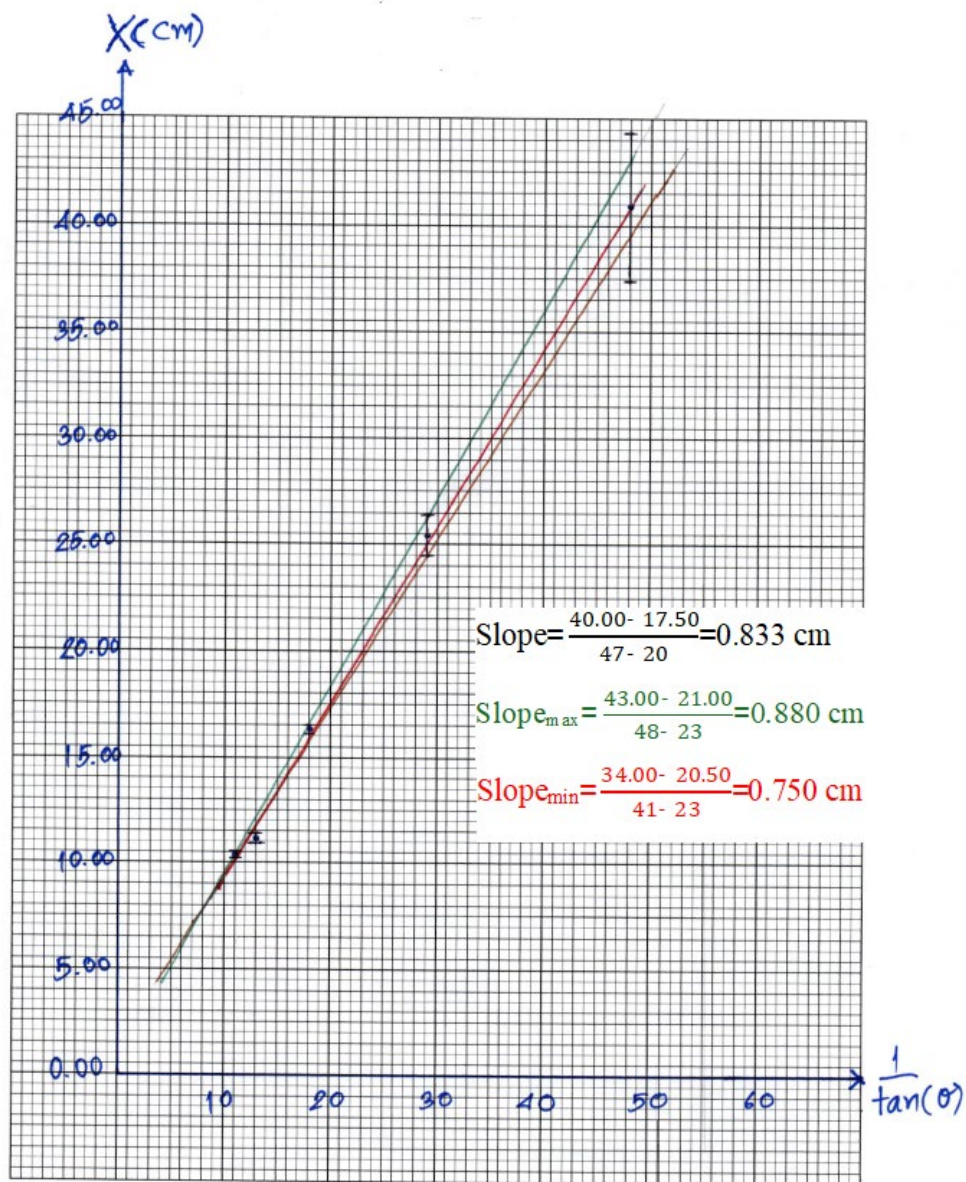
หรือ $C = \frac{\text{slope}}{R}$

หรือ อาจสร้างใช้สมการเส้นตรงแบบอื่น เช่น

จากสมการ $\frac{x_{\text{cm}}}{R} \tan \theta = C$ แปลงเป็น $\frac{\ell_{\text{cm}} \cos^2 \theta}{R} \tan \theta = \frac{\ell_{\text{cm}}}{R} \cos \theta \sin \theta = \frac{\ell_{\text{cm}}}{R} \frac{\sin \beta}{2} = C$

กราฟ ℓ_{cm} vs. $\frac{2}{\sin \beta}$ จะมีความชัน $\text{slope} = CR$

หรือ $C = \frac{\text{slope}}{R}$



3.d การคำนวณค่า C จากกราฟเส้นตรง

กราฟ x_{cm} vs. $\frac{1}{\tan \theta}$ จะมีความชัน $\text{slope} = CR$

$$\text{หรือ } C = \frac{\text{slope}}{R}$$

ลากเส้นแนวโน้มที่ดีที่สุด (least squares error)

$$\text{ได้ slope} = 0.833 \text{ cm} \text{ ทำให้ได้ } C = \frac{\text{slope}}{R} = 0.666$$

ลากเส้นความชันสูงสุดที่ยังอยู่ภายใน error bar

$$\text{ได้ slope} = 0.880 \text{ cm} \text{ ทำให้ได้ } C = \frac{\text{slope}}{R} = 0.704$$

เมื่อลากเส้นความชันต่ำสุดที่ยังอยู่ภายใน error bar

$$\text{ได้ slope} = 0.750 \text{ cm} \text{ ทำให้ได้ } C = \frac{\text{slope}}{R} = 0.600$$

ดังนั้น

$$C \pm \Delta C = 0.67 \pm 0.05$$

หมายเหตุ:

$$\text{ค่าทางทฤษฎี } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$