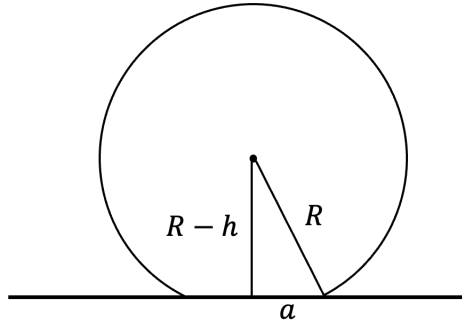


ข้อที่ 1. กลศาสตร์การสัมผัส

[10 คะแนน]

a) พิจารณาสัมผัสกลมม้วน



เราสามารถเขียน

$$\begin{aligned} R^2 &= (R-h)^2 + a^2 \\ &= R^2 \left(1 - \frac{h}{R}\right)^2 + a^2 \\ &= R^2 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) + a^2 \quad (h \ll R) \\ &= R^2 - 2Rh + a^2 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ $a = \sqrt{2Rh}$

b) กำหนดให้

$$p(r) = \frac{\sqrt{2}Eh}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

เราสามารถหาแรงได้โดยการอินทิเกรต

$$\begin{aligned} F &= \int_0^a p(r) 2\pi r dr \\ &= \frac{2\sqrt{2}Eh}{a} \int_0^a r \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} dr \\ &= 2\sqrt{2}Eha \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx \quad \left(x = \frac{r}{a}\right) \\ &= 2\sqrt{2}Eha \left[-\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} Eha \\ &= \frac{4}{3} E\sqrt{Rh}^{3/2} \quad (a = \sqrt{2Rh}) \end{aligned}$$

c) หาพลังงานศักย์จาก

$$\begin{aligned} U(h) &= \int_0^h F dh' \\ &= \frac{4}{3} E \sqrt{R} \int_0^h h'^{3/2} dh' \\ &= \frac{8}{15} E \sqrt{R} h^{5/2} \end{aligned}$$

d) พลังงานจลน์ $mu^2/2$ เปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์ $U(h_{\max})$

$$\begin{aligned} U(h_{\max}) &= \frac{1}{2} mu^2 \\ \frac{8}{15} E \sqrt{R} h_{\max}^{5/2} &= \frac{1}{2} \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right) u^2 \\ h_{\max}^{5/2} &= \frac{5\pi u^2}{4 c^2} R^{5/2} \quad \left(c^2 = \frac{E}{\rho} \right) \\ h_{\max} &= \left(\frac{5\pi}{4} \right)^{2/5} \left(\frac{u}{c} \right)^{4/5} R \end{aligned}$$

ดังนั้น $\alpha = (5\pi/4)^{2/5}$ และ $\beta = 4/5$

e) ขณะที่ระยะยุบเท่ากับ h ($h < h_{\max}$) วัตถุมีขนาดของความเร็วเท่ากับ v ($v < u$) เราสามารถใช้กฎอนุรักษ์พลังงานเพื่อเขียน

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{8}{15} E \sqrt{R} h^{5/2}$$

เมื่อหารตลอดด้วย $mu^2/2$ จะได้

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{v}{u} \right)^2 + \left(\frac{h}{h_{\max}} \right)^{5/2} \quad \left(\frac{1}{2} mu^2 = \frac{8}{15} E \sqrt{R} h_{\max}^{5/2} \right) \\ v &= u \sqrt{1 - \left(\frac{h}{h_{\max}} \right)^{5/2}} \\ \frac{dh}{dt} &= u \sqrt{1 - \left(\frac{h}{h_{\max}} \right)^{5/2}} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $h/h_{\max} = x$ ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{h_{\max}} \sqrt{1 - x^{5/2}}$$

ช่วงเวลา T ที่วัตถุสัมผัสกำแพง (ช่วงเวลาที่ h เปลี่ยนจากศูนย์เป็น $h_{\max}$ และกลับมาเป็นศูนย์อีกครั้ง) คือ

$$\begin{aligned} T &= 2 \frac{h_{\max}}{u} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}} \\ &= 2.94 \frac{h_{\max}}{u} \end{aligned}$$

f) จากสมการ

$$p(r) = \frac{\sqrt{2}Eh}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad a = \sqrt{2Rh}$$

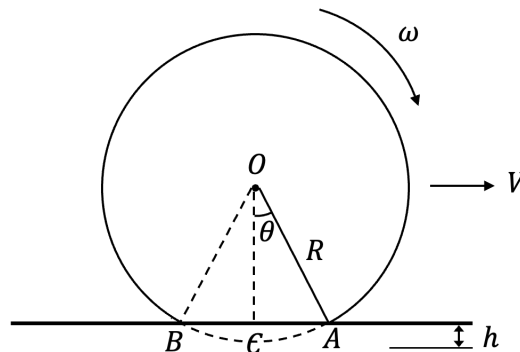
ความดันจะมีค่ามากที่สุดที่ $r = 0$ และ $h = h_{\max}$

$$\begin{aligned} p_{\max} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{h_{\max}}{R}} E \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{5\pi}{4}\right)^{2/5} \left(\frac{u}{c}\right)^{4/5}} E \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{5\pi}{4}\right)^{1/5} \left(\frac{u}{c}\right)^{2/5} E \\ &= \left(\frac{5}{4\pi^4}\right)^{1/5} \left(\frac{u}{c}\right)^{2/5} E \end{aligned}$$

ดังนั้น $\gamma = (5/4\pi^4)^{1/5}$ และ $\delta = 2/5$

นักเรียนอาจจะใช้ $h_{\max}/R = \alpha(u/c)^\beta$ ซึ่งจะได้ $p_{\max} = (\sqrt{\alpha}/\pi)(u/c)^{\beta/2}E$ ดังนั้น $\gamma = \sqrt{\alpha}/\pi$ และ $\delta = \beta/2$

g) พิจารณามุม θ ในรูป



เราสามารถเขียน $R - h = R \cos \theta$ หรือ $h = R(1 - \cos \theta) = R \theta^2/2$ เมื่อมุม θ มีขนาดเล็ก ดังนั้น

$$\theta^2 = \frac{2h}{R}$$

พิจารณาเส้นตรง OA กวาดไปเป็นมุม θ ภายในเวลา $t = \theta/\omega$ และในขณะเดียวกันวัตถุก็เคลื่อนที่ได้ระยะทาง $CA = R \sin \theta$ ภายในเวลา $t = R \sin \theta/V$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{\omega} &= \frac{R \sin \theta}{V} \\ \frac{V}{\omega} &= \frac{R \sin \theta}{\theta} \\ R_e &= \frac{R}{\theta} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \\ &= R \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) \\ &= R \left(1 - \frac{h}{3R} \right)\end{aligned}$$

จึงสรุปว่า $\varepsilon = -1/3$

h) ใช้สมการ $N_1 + N_2 = W$ และ $N_2 = (1 - \eta)N_1$

$$\begin{aligned}N_1 + (1 - \eta)N_1 &= W \\ (2 - \eta)N_1 &= W \\ N_1 &= \frac{W}{2 - \eta}\end{aligned}$$

จาก $N_2 = (1 - \eta)N_1$ เราจะได้

$$N_2 = \frac{(1 - \eta)W}{2 - \eta}$$

i) ในสภาพสมดุล เราสามารถเขียน

$$(N_1 - N_2)e = f(R - h)$$

จากข้อ h เราสามารถหา $N_1 - N_2 = \eta W / (2 - \eta)$ ดังนั้น

$$\frac{\eta W}{2 - \eta} e = f(R - h)$$

นิยามสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน f/W

$$\frac{f}{W} = \frac{\eta e}{(2 - \eta)(R - h)}$$

ข้อที่ 2 ปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็กของฟาราเดย์ (Magneto-optical Faraday Effect) [10 คะแนน]

a) SOLUTION

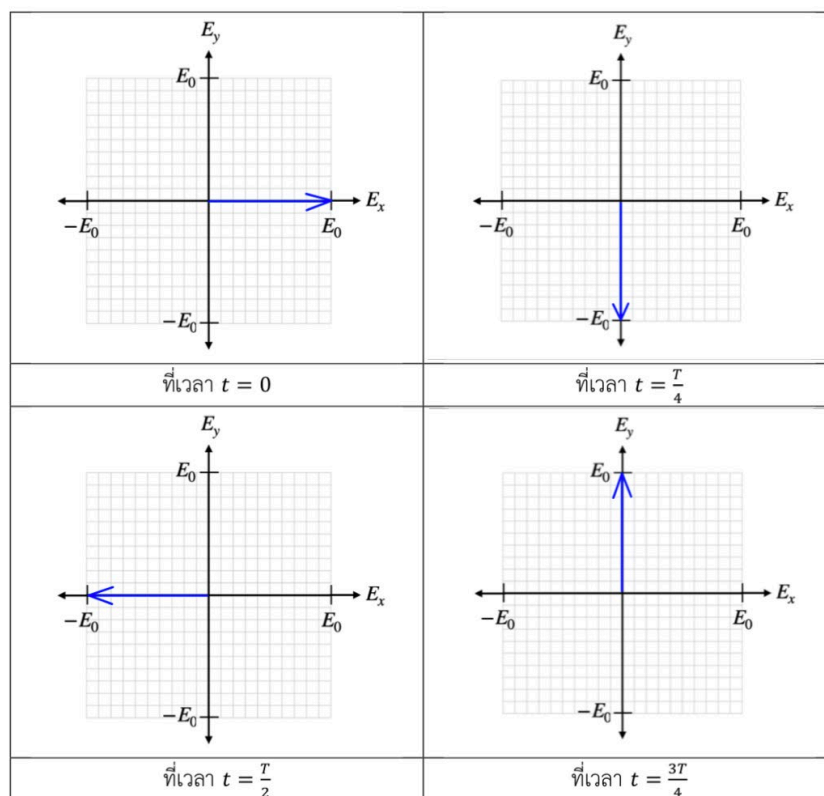
แทนค่า $z = 0$ ลงในสมการสนามไฟฟ้าลัทธิของคลื่นแสงที่โจทย์ให้มา

$$\vec{E}_L(z, t) = E_0 \cos(k_L z - \omega t) \hat{i} + E_0 \sin(k_L z - \omega t) \hat{j}$$

จะได้สมการสนามไฟฟ้าลัทธิ

$$\vec{E}_L(0, t) = E_0 \cos(-\omega t) \hat{i} + E_0 \sin(-\omega t) \hat{j} = E_0 \cos(\omega t) \hat{i} - E_0 \sin(\omega t) \hat{j}$$

จากสมการเมื่อมองย้อนเข้าไปในทิศทางที่คลื่นแสงวิ่งเข้าหาตาผู้สังเกต ผู้สังเกตจะเห็นสนามไฟฟ้าหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา โดยสนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงตามเวลาดังรูปด้านล่าง



b) SOLUTION

เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ผ่านวัสดุไดอิเล็กทริก สนามไฟฟ้า $\vec{E}_L$ จะทำอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนภายในโมเลกุลที่อยู่บนแกน z ด้วยแรงไฟฟ้า $-e\vec{E}_L$ นอกจากนี้อิเล็กตรอนยังถูกกระทำด้วยแรงแม่เหล็ก $-e\vec{v} \times \vec{B}$ ทำให้โมเลกุลเปลี่ยนสภาพเป็นขั้วคู่ไฟฟ้า โดยการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจะเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน นักเรียนสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนโดยเขียนเวกเตอร์ของปริมาณต่าง ๆ ออกมาดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} & \vec{B} &= B_0\hat{k} \\ \vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} & \vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\end{aligned}$$

และแทนค่าลงในสมการ $m\vec{a} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}_L - e\vec{v} \times \vec{B} - b\vec{v}$ จะได้

$$\begin{aligned}a_x &= -\omega_0^2x - \frac{e}{m}E_0 \cos(k_Lz - \omega t) - \frac{e}{m}B_0v_y - \frac{b}{m}v_x \\ a_y &= -\omega_0^2y - \frac{e}{m}E_0 \sin(k_Lz - \omega t) + \frac{e}{m}B_0v_x - \frac{b}{m}v_y\end{aligned}$$

c) SOLUTION

โดยปกติคำตอบของสมการจะประกอบด้วยคำตอบ 2 ส่วนคือส่วนที่เป็นการสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติของระบบ กับส่วนที่เป็นผลจากการขับเคลื่อนของแรงภายนอก ในธรรมชาติคำตอบส่วนที่สั่นด้วยความถี่ธรรมชาติจะสลายตัว (decay) ซึ่งเป็นผลมาจากการชนกันระหว่างโมเลกุล โดยสำหรับการคำนวณในกรณีนี้เรากำหนดให้ค่าคงที่การสลายตัว b มีค่าน้อยมากทำให้ตัดออกจากสมการได้ แต่ก็มีค่ามากพอที่จะทำให้คำตอบส่วนที่สั่นด้วยความถี่ธรรมชาตินั้นสลายตัว¹ ทำให้ท้ายที่สุด ดังนั้นอิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ภายใต้ผลจากการขับเคลื่อนของแรงภายนอก ซึ่งโจทย์กำหนดให้มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = x_0 \cos(k_Lz - \omega t)\hat{i} + y_0 \sin(k_Lz - \omega t)\hat{j}$ เมื่อแทน $\vec{r}(t) = x_0 \cos(k_Lz - \omega t)\hat{i} + y_0 \sin(k_Lz - \omega t)\hat{j}$ ลงในสมการที่ได้จากข้อ d) ทำให้เราได้สมการเชิงเส้นสองชั้นสองตัวแปร

$$mx_0(\omega_0^2 - \omega^2) - eB_0\omega y_0 = -eE_0$$

และ

$$my_0(\omega_0^2 - \omega^2) - eB_0\omega x_0 = -eE_0$$

เมื่อแก้สมการทั้งสองพร้อมกันจะได้ $x_0 = y_0 = \frac{\Omega_C E_0}{B_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Omega_C \omega}$ โดยที่ $\Omega_C = -eB_0/m$

¹ สามารถอ่านเกี่ยวกับ transient solution และ steady state solution เพิ่มเติมได้จาก <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/oscd.html#c2>

d) SOLUTION

จากคำตอบข้อ c) ขั้วคู่ไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับ $\vec{p} = -e\vec{r} = -ex_0[\cos(k_L z - \omega t)\hat{i} + \sin(k_L z - \omega t)\hat{j}]$

ดังนั้นค่าโพลาไรเซชันจะมีค่าเท่ากับ $\vec{P} = -eNx_0[\cos(k_L z - \omega t)\hat{i} + \sin(k_L z - \omega t)\hat{j}]$

จากโจทย์เราสามารถเขียนโพลาไรเซชันได้เป็น

$$\vec{P} = \epsilon_0(K_L - 1)E_0[\cos(k_L z - \omega t)\hat{i} + \sin(k_L z - \omega t)\hat{j}]$$

จากการเปรียบเทียบโพลาไรเซชันจากสองสมการ เราจะได้ค่าคงที่ไดอิเล็กทริกเท่ากับ

$$K_L = 1 + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{eB_0\omega}{m}}$$

$$\text{ค่าดัชนีหักเหแสง } n_L \text{ มีค่า } n_L = \sqrt{K_L} = \sqrt{1 + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{eB_0\omega}{m}}}$$

e) SOLUTION

สนามไฟฟ้าจะหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อผู้สังเกตมองย้อนกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น

f) SOLUTION

ในกรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีสนามไฟฟ้าเป็น $\vec{E}_R$ สนามไฟฟ้าจะหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อผู้สังเกตมองย้อนกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น ดังนั้นขั้วคู่ไฟฟ้าจะถูกเหนี่ยวนำในทิศทางตรงข้ามกับกรณีของ $\vec{E}_L$ ดังนั้นสมการ n_R จะมีรูปแบบเหมือนกับสมการ n_L ยกเว้นความถี่เชิงมุม ω จะเปลี่ยนไปเป็น $-\omega$ ดัชนีหักเห

$$\text{แสง } n_R \text{ จึงมีสมการเป็น } n_R = \sqrt{K_R} = \sqrt{1 + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{eB_0\omega}{m}}}$$

g) SOLUTION

เขียน $\frac{1}{2}\vec{E}_R + \frac{1}{2}\vec{E}_L$ ทำให้ได้ $a_R = a_L = \frac{1}{2}$

h) SOLUTION

นักเรียนต้องสังเกตว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{i}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \left[\frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t)\hat{i} - \frac{E_0}{2} \sin(kz - \omega t)\hat{j} \right] \\ &+ \left[\frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t)\hat{i} + \frac{E_0}{2} \sin(kz - \omega t)\hat{j} \right] = \frac{1}{2}\vec{E}_R + \frac{1}{2}\vec{E}_L \end{aligned}$$

เมื่อคลื่นแสงเคลื่อนที่เข้าไปในตัวกลาง ความยาวคลื่นจะเปลี่ยน (โดยที่ความถี่ยังมีค่าเท่าเดิม) จาก λ เป็น $\frac{\lambda}{n}$ เมื่อ n คือค่าดัชนีหักเหแสง ซึ่งทำให้เลขคลื่นเปลี่ยนจาก k ไปเป็น nk ดังนั้นคลื่นองค์ประกอบของคลื่นแสงโพลาไรซ์เชิงเส้น $\vec{E}_L$ และ $\vec{E}_R$ จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่ไม่เท่ากัน โดยคลื่นลัพท์จะมีสมการเป็น

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \frac{E_0}{2} \cos(n_R kz - \omega t) \hat{i} - \frac{E_0}{2} \sin(n_R kz - \omega t) \hat{j} + \frac{E_0}{2} \cos(n_L kz - \omega t) \hat{i} \\ &\quad + \frac{E_0}{2} \sin(n_L kz - \omega t) \hat{j} \\ &= \frac{E_0}{2} [\cos(n_R kz - \omega t) + \cos(n_L kz - \omega t)] \hat{i} \\ &\quad - \frac{E_0}{2} [\sin(n_R kz - \omega t) - \sin(n_L kz - \omega t)] \hat{j}\end{aligned}$$

หลังจากนั้นเราจะทำการใช้ความสัมพันธ์ $\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$ และ

$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$ สมการ $\vec{E}(z, t)$ จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= E_0 \left\{ \cos \left[\frac{(n_R - n_L)}{2} kz \right] \hat{i} - \sin \left[\frac{(n_R - n_L)}{2} kz \right] \hat{j} \right\} \\ &\quad \times \cos \left[\frac{(n_R + n_L)}{2} kz - \omega t \right]\end{aligned}$$

สมการ S.1

จากสมการ S.1 คลื่นแสงจะมี $k_T = \frac{(n_R + n_L)}{2} k$ และมุมที่ระนาบโพลาไรซ์ของสนามไฟฟ้าบิดไปมีค่าเท่ากับ

$$\phi = -\frac{(n_R - n_L)}{2} kL = -\frac{(n_R - n_L)}{2} \frac{2\pi}{\lambda} L = -\frac{\pi L}{\lambda} (n_R - n_L)$$

ค่า ϕ มีค่าติดลบเพราะว่าจากสมการ S.1 ระนาบการสั่นของสนามไฟฟ้าจะบิดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองย้อนเข้าไปในทิศทางที่แสงเคลื่อนที่

i) SOLUTION

เราสามารถทำการประมาณค่าคงที่ของเวอร์เดต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{เริ่มจากเราพิจารณาเทอม } n_L^2 : n_L^2 &= 1 + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{1}{1 + \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2 - \omega^2)}} \\ &= 1 + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(1 + \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^{-1} \\ &\approx 1 + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(1 - \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \\ &\approx n_0^2 - \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ &\approx n_0^2 - (n_0^2 - 1) \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ &\approx n_0^2 \left[1 - \frac{(n_0^2 - 1)}{n_0^2} \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } n_L &\approx n_0 \left[1 - \frac{(n_0^2-1)}{n_0^2} \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2-\omega^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \approx n_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(n_0^2-1)}{n_0^2} \frac{\omega \Omega_C}{(\omega_0^2-\omega^2)} \right] \approx n_0 + \frac{eB}{2m} \frac{(n_0^2-1)}{n_0} \frac{\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} \\ \text{ทำนองเดียวกัน } n_R &\approx n_0 - \frac{eB}{2m} \frac{(n_0^2-1)}{n_0} \frac{\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} \\ \text{แทนค่าลงในสมการ } \phi &= \frac{\pi \ell}{\lambda} (n_L - n_R) \text{ จะได้ } \phi \approx \frac{\pi \ell}{\lambda} \frac{eB}{m} \frac{(n_0^2-1)}{n_0} \frac{\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} \\ \text{แทน } \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \text{ เราจะได้ } \phi &\approx \frac{\pi \ell}{2\pi c} \frac{eB}{m} \frac{(n_0^2-1)\omega^2}{n_0(\omega_0^2-\omega^2)} \approx \frac{e}{2mc} \left(\frac{n_0^2-1}{n_0} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2} \right) \ell B \\ \text{ดังนั้นค่าคงที่ของเวอร์เดตมีค่าประมาณ } V &\approx \frac{e}{2mc} \left(\frac{n_0^2-1}{n_0} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2} \right) \text{ และ } V_0 = \frac{e}{2mc} \end{aligned}$$

j) SOLUTION

นักเรียนสามารถคำนวณหาค่าคงที่ของเวอร์เดตได้ดังนี้

คำนวณค่าของ ω ที่ความยาวคลื่น 510 nm จะได้ $\omega = \frac{2\pi c}{510 \times 10^{-9}} = 3.696 \dots \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$

คำนวณค่าของ n_0 จาก $n_0 = \sqrt{1 + \frac{1.265 \times 510^2}{510^2 - 96.65^2}} = 1.521$

อ่านค่า γ จากกราฟ ได้ $\gamma = 0.788$

แปลงค่า 96.65 nm ให้เป็น ω_0 จะได้ $\omega_0 = 1.950 \times 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ $V = \gamma \frac{e}{2mc} \left(\frac{n_0^2-1}{n_0} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2} \right)$ จะได้ $V = 7.41 \text{ rad m}^{-1} \text{ T}^{-1}$

k) SOLUTION

นักเรียนสามารถคำนวณมุม ϕ ที่บิดไปได้ดังนี้

แทนค่าลงในสมการ $\phi = 7.415 \times 0.10 \times 5.0 \times 10^{-3} = 3.707 \times 10^{-3} \text{ rad}$

แปลงมุมให้อยู่ในหน่วยองศา $\phi = 3.707 \times 10^{-3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 0.212 \text{ องศา}$

ข้อที่ 3 Quantum Capacitance

[10 คะแนน]

a.) SOLUTION

จากกฎของเกาส์จะได้ว่า

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\epsilon_r EA + 0 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{-Q}{A\epsilon_r\epsilon_0}$$

จาก $V = Ed$ และ $n = \frac{Q}{(-e)A}$ จะได้ว่า

$$V = -\frac{Qd}{A\epsilon_r\epsilon_0} = \frac{ned}{\epsilon_r\epsilon_0}$$

ดังนั้น

$$n = \left(\frac{\epsilon_r\epsilon_0}{ed}\right)V$$

b.) SOLUTION

จากนิยามของค่าความจุซึ่งเท่ากับ Q/V จะได้ว่าค่าความจุต่อพื้นที่คือ

$$C_G \equiv \frac{|Q|}{AV} = \frac{en}{V} = \frac{\epsilon_r\epsilon_0}{d}$$

c.) SOLUTION

เนื่องจากระยะห่างระหว่างตำแหน่งบัพที่อยู่ติดกันคือ $\lambda/2$ ดังนั้น

ความยาวคลื่นที่มากที่สุดอันดับที่ 1 เกิดขึ้นเมื่อ $a = \lambda/2 \rightarrow \lambda = 2a$

ความยาวคลื่นที่มากที่สุดอันดับที่ 2 เกิดขึ้นเมื่อ $a = 2(\lambda/2) \rightarrow \lambda = a$

ในกรณีที่ $\tilde{n}$ ใดๆ ปลายทั้งสองข้างจะเป็นตำแหน่งบัพได้ก็ต่อเมื่อ $a = \tilde{n}(\lambda/2)$ โดยที่ $\tilde{n} = 1, 2, 3, \dots$

ดังนั้นค่าความยาวคลื่นที่เป็นไปได้ของอิเล็กตรอนคือ

$$\lambda_{\tilde{n}} = \frac{2a}{\tilde{n}} ; \tilde{n} = 1, 2, 3, \dots$$

d.) SOLUTION

จากความสัมพันธ์ตามหลักของเดอบรอยล์ เราจะได้ค่าโมเมนตัมของอิเล็กตรอนเป็น

$$p_{\tilde{n}} = \frac{h}{\lambda_{\tilde{n}}} = \frac{h}{2a} \tilde{n}$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนคือ

$$E_{\tilde{n}} = \frac{p_{\tilde{n}}^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} \tilde{n}^2$$

e.) SOLUTION

อิเล็กตรอนจะถูกใส่ไปที่สถานะที่มีพลังงานต่ำสุดก่อน ดังนั้นอิเล็กตรอนจะถูกใส่ไปในระดับพลังงานที่มีค่า $\hbar$ น้อยที่สุดก่อน อีกทั้งในแต่ละค่าระดับพลังงาน $E_{\hbar}$ จะสามารถใส่อิเล็กตรอนได้สองตัวเนื่องจาก $(\lambda_{\hbar}, \uparrow)$ และ $(\lambda_{\hbar}, \downarrow)$ มีพลังงานที่เท่ากัน ดังนั้นอิเล็กตรอนสองตัวแรกที่ใส่เข้าไปจะอยู่ที่สถานะ $(\lambda_1, \uparrow)$ และ $(\lambda_1, \downarrow)$ อิเล็กตรอนตัวที่สามและสี่จะไม่สามารถอยู่ที่ชั้นพลังงาน $\hbar = 1$ ได้อีกเนื่องจากถูกครอบครองจนเต็ม จึงต้องถูกใส่ในระดับพลังงานถัดไปที่ $\hbar = 2$ ดังนั้นอิเล็กตรอนตัวที่สามและสี่จะอยู่ในสถานะ $(\lambda_2, \uparrow)$ และ $(\lambda_2, \downarrow)$ สรุปคืออิเล็กตรอน ตัวจะครอบครองสถานะ

$$(\lambda_1, \uparrow), (\lambda_1, \downarrow), (\lambda_2, \uparrow), (\lambda_2, \downarrow) = (2a, \uparrow), (2a, \downarrow), (a, \uparrow), (a, \downarrow)$$

f.) SOLUTION

สำหรับกรณีที่ N เป็นเลขคู่ระดับพลังงาน $\hbar$ สูงสุดที่ถูกครอบครองคือ $\hbar = N/2$ เนื่องจากแต่ละระดับพลังงานสามารถใส่อิเล็กตรอนได้สองตัวจากสปินขึ้นและลง ดังนั้นพลังงานจลน์สูงสุดคือ

$$E_F = E_{\frac{N}{2}} = \frac{h^2}{8ma^2} \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

สำหรับกรณีที่ N เป็นเลขคี่ระดับพลังงาน $\hbar$ สูงสุดที่ถูกครอบครองคือ $\hbar = \frac{N-1}{2} + 1 = (N+1)/2$ ดังนั้นพลังงานจลน์สูงสุดคือ

$$E_F = E_{\frac{N+1}{2}} = \frac{h^2}{8ma^2} \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

g.) SOLUTION

เราต้องการให้พลังงานความร้อนมีค่าน้อยกว่าระยะห่างระหว่างระดับพลังงานที่ติดกัน นั่นคือ

$$k_B T < E_{\tilde{n}+1} - E_{\tilde{n}} = \frac{h^2}{8ma^2} (2\tilde{n} + 1)$$

$$a^2 < \frac{h^2}{8mk_B T} (2\tilde{n} + 1)$$

สำหรับการแยกทุกระดับพลังงานให้ออก ค่า $\tilde{n}$ ต้องเป็น 1 เพื่อให้ค่า $E_{\tilde{n}+1} - E_{\tilde{n}}$ มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น

$$a < \left(\frac{3h^2}{8mk_B T}\right)^{1/2}$$

ดังนั้นความกว้างที่มากที่สุดที่ยังสามารถแยกทุกระดับพลังงานได้ที่ $T = 300 \text{ K}$ คือ

$$a_{max} = \left(\frac{3h^2}{8mk_B(300\text{ K})} \right)^{1/2} = 6.60 \times 10^{-9} \text{ m}$$

h.) SOLUTION

แผ่นโลหะอยู่ที่ศักย์ไฟฟ้าเป็น 0 เนื่องจากต่อกับสายดิน

โจทย์กำหนดให้พลังงานตอนเริ่มต้นของอิเล็กตรอนในแผ่นโลหะเป็นศูนย์เมื่อ $V = 0$ เราจะได้ว่าพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน $E_k = 0$ เมื่อใส่ความต่างศักย์ V เพราะระดับพลังงานจลน์ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากพลังงานอยู่ชิดกันมาก ดังนั้น

$$E_{metal} = U_{elec} + E_k = 0$$

i.) SOLUTION

จากข้อ a และ b เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอิเล็กตรอนต่อพื้นที่ n และศักย์ไฟฟ้า V_{elec} เป็น

$$V_{elec} = \frac{en}{\left(\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{d} \right)} = \frac{en}{C_G}$$

ดังนั้น

$$U_{elec} = (-e)(-V_{elec}) = \frac{e^2 n}{C_G} = \frac{e^2 n d}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

j.) SOLUTION

สำหรับแผ่นแกรฟีนพลังงานรวมของอิเล็กตรอนมาจากพลังงานศักย์ไฟฟ้า U_{elec} เนื่องจากสนามไฟฟ้าระหว่างตัวเก็บประจุและพลังงานจลน์ E_F ที่เพิ่มขึ้นจากหลักการกีดกันของเพาลี

$$E_{graphene} = U_{elec} + E_F$$

และจากโจทย์ให้

$$E_F = \hbar v_F \sqrt{\pi n}$$

เราจะได้ว่า

$$E_{graphene} - E_{metal} = \frac{e^2 n}{C_G} + \hbar v_F \sqrt{\pi n} - 0 = eV$$

แก้สมการโดยมองเป็นสมการพหุนามกำลังสองของ $\sqrt{n}$ จะได้ n เท่ากับ

$$n = \left(-\frac{\hbar v_F \sqrt{\pi} C_G}{2e^2} + \sqrt{\frac{\hbar^2 v_F^2 \pi C_G^2}{4e^4} + \frac{C_G V}{e}} \right)^2$$

ดังนั้น

$$n_0 = \frac{\hbar^2 v_F^2 \pi C_G^2}{4e^4}$$

k.) SOLUTION

จากสมการในข้อ h ที่ว่า

$$E_{\text{graphene}} - E_{\text{metal}} = \frac{e^2 n}{C_G} + E_F = eV$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} \equiv \frac{1}{e} \frac{dV}{dn} = \frac{1}{C_G} + \frac{1}{e^2} \frac{dE_F}{dn}$$

ดังนั้น

$$C_Q = e^2 \left(\frac{dE_F}{dn} \right)^{-1} = \frac{2e^2}{\hbar v_F \sqrt{\pi}} \sqrt{n}$$

l.) SOLUTION

แทนค่าตัวแปรต่างๆจะได้ว่า $C_G = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{d} = 1.15 \times 10^{-4} \text{ F/m}^2$ ดังนั้น

สำหรับกรณีตัวเก็บประจุทำจากแผ่นโลหะสามมิติทั้งคู่ (กรณีข้อ a)

$$n_{\text{metal}} = 7.18 \times 10^{12} \text{ m}^{-2}$$

สำหรับกรณีที่แผ่นหนึ่งเป็นแกรฟีน (กรณีข้อ j)

$$n_{\text{graphene}} = 5.02 \times 10^{12} \text{ m}^{-2}$$