

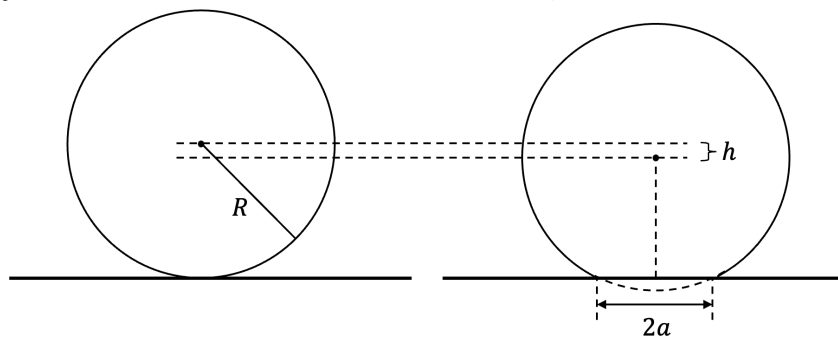
ข้อที่ 1 กลศาสตร์การสัมผัส

[10 คะแนน]

ปัญหาข้อนี้เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ 2 ชิ้นที่สัมผัสกันมากกว่า 1 จุด ตอนที่ 1 และ 2 มีความต่อเนื่องกันซึ่งเกี่ยวข้องกับความดันและการเปลี่ยนรูปร่างขณะที่วัตถุชนกัน ตอนที่ 3 ศึกษาแบบจำลองของล้อรถที่กำลังกลิ้งบนพื้นถนน นักเรียนสามารถทำตอนที่ 3 ได้โดยไม่ต้องใช้ผลจากตอนที่ 1 และ 2

ตอนที่ 1 การเปลี่ยนรูปร่าง

รูปที่ 1 แสดงวัตถุยืดหยุ่นรูปทรงกลมรัศมี R อันหนึ่ง พิจารณาวัตถุนี้ขณะที่ชนกับพื้นแข็ง พบว่าจุดศูนย์กลางของวัตถุอยู่ต่ำลงมาเป็นระยะ h ($h \ll R$) เมื่อเทียบกับตอนที่ผิวของวัตถุสัมผัสกับพื้นพอดี วัตถุยุบตัวเกิดเป็นผิวสัมผัสรูปวงกลมรัศมี a สมมติให้ส่วนที่เป็นผิวโค้งของวัตถุยังคงมีรัศมีเท่ากับ R



รูปที่ 1 ภาพอย่างง่ายแสดงการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุทรงกลมเมื่อชนพื้นแข็ง

a) จงแสดงว่า $a = \sqrt{2Rh}$

คำแนะนำ นักเรียนสามารถใช้ $(1+x)^n = 1+nx$ ถ้า $|x| \ll 1$

[1.0 คะแนน]

กำหนดให้ความดันที่เกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสเป็นฟังก์ชันของระยะทาง r จากจุดกึ่งกลางของผิวสัมผัสรูปวงกลมตามสมการ

$$p(r) = \frac{\sqrt{2}Eh}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

โดยที่ E คือยังก์มอดูลัสยังผล (effective Young's Modulus)

b) โดยการอินทิเกรตบนพื้นที่ผิวสัมผัสรูปวงกลม จงแสดงว่าแรงตั้งฉากที่ผิวสัมผัสมีขนาด

$$F = \frac{4}{3} E \sqrt{R} h^{3/2}$$

คำแนะนำ นักเรียนสามารถใช้ $\int x \sqrt{1-x^2} dx = -(1-x^2)^{3/2}/3 + C$

[1.0 คะแนน]

c) จงหาพลังงานศักย์ยืดหยุ่น $U(h)$ ($U \geq 0$) ของการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ (ตอบในรูปของ E, R และ h)

คำแนะนำ นักเรียนสามารถใช้ $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + C$, $n \neq -1$

[1.0 คะแนน]

ตอนที่ 2 การชนแบบยืดหยุ่น

พิจารณาวัตถุทรงกลมในตอนที่ 1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วขนาดเท่ากับ u เข้าชนกำแพงแข็งในทิศทางตั้งฉากกับระนาบของกำแพง สมมติให้การชนเป็นแบบยืดหยุ่น พบว่าผิวของวัตถุจะยุบตัวไประยะมากที่สุด $h = h_{\max}$ ก่อนที่เริ่มกลับทิศทางการเคลื่อนที่และกระดอนออกมาจากกำแพง กำหนดให้อัตราเร็วเสียงในวัตถุ คือ $c = \sqrt{E/\rho}$ โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของวัตถุซึ่งถือว่าคงที่ และ ไม่ต้องคำนึงผลของสนามโน้มถ่วง

d) จงแสดงว่าเราสามารถเขียน

$$h_{\max} = \alpha \left(\frac{u}{c}\right)^\beta R$$

พร้อมกับระบุตัวเลขค่าคงที่ α และ β

[1.0 คะแนน]

e) จงหาช่วงเวลาที่วัตถุสัมผัสกับกำแพง (ตอบในรูปของ $h_{\max}$ และ u)

[2.0 คะแนน]

คำแนะนำ นักเรียนสามารถใช้ $\int_0^1 (1 - x^{5/2})^{-1/2} dx \approx 1.47$

f) กำหนดให้ $p_{\max}$ คือความดันสูงสุดที่เกิดขึ้นระหว่างการชนระหว่างวัตถุและผนัง จงแสดงว่าเราสามารถเขียน $p_{\max}$ ให้อยู่ในรูปของ

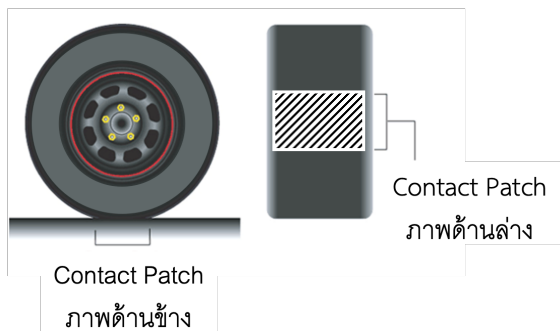
$$p_{\max} = \gamma \left(\frac{u}{c}\right)^\delta E$$

พร้อมกับระบุตัวเลขค่าคงที่ γ และ δ

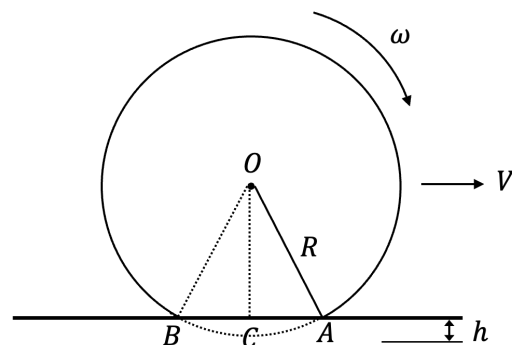
[1.0 คะแนน]

ตอนที่ 3 แบบจำลองล้อรถ

รูปที่ 2a แสดงบริเวณพื้นที่หน้ายางบนถนน หรือ contact patch จะเห็นว่าเส้นรอบวงของล้อไม่เป็นวงกลม การเกิด contact patch ทำให้รัศมียังผล (effective radius) ของล้อมีค่าแตกต่างจากรัศมีจริง ดังนั้นล้อหมุนได้จำนวนรอบต่อเมตรไม่เท่ากับกรณีที่ล้อสัมผัสพื้นแค่จุดเดียว ค่ารัศมียังผลนี้จึงมีความสำคัญในกระบวนการสอบเทียบมาตรวัดความเร็วรถ



a



b

รูปที่ 2 a) contact patch b) แบบจำลองล้อรถ

เราสร้างแบบจำลองล้อรถให้เป็นวัตถุทรงกระบอกที่กำลังกลิ้งบนพื้นแข็งตามที่แสดงในรูปที่ 2b มีแกนหมุนผ่านจุด O และจุด C อยู่กึ่งกลางระหว่าง A และ B ขณะที่ขนาดของความเร็วเชิงมุมรอบแกนหมุนของวัตถุเท่ากับ ω ขนาดของความเร็วในแนวระดับของวัตถุคือ $V = \omega R_e$ โดยที่ R_e ($R_e \neq R$) คือค่ารัศมียังผลของวัตถุ สมมติให้ contact patch ไม่ไถล เราสามารถหา R_e ได้โดยการพิจารณาเวลาที่เส้นตรง OA กวาดไปเป็นมุมค่าหนึ่งขณะที่วัตถุเลื่อนตำแหน่งไประยะหนึ่งในแนวระดับ กำหนดให้ $h \ll R$

g) จงแสดงว่า

$$R_e = \left(1 + \varepsilon \frac{h}{R}\right) R$$

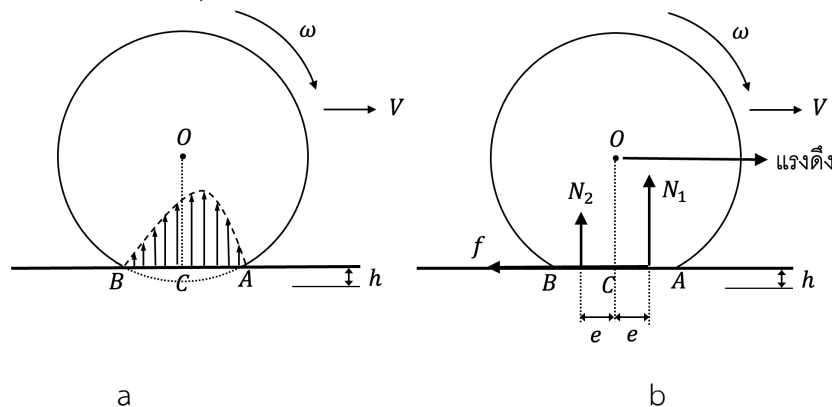
พร้อมกับระบุตัวเลขค่าคงที่ ε

[1.0 คะแนน]

คำแนะนำ ในกรณีที่ $|x| \ll 1$ นักเรียนสามารถใช้ $\sin x = x - x^3/6$ และ $\cos x = 1 - x^2/2$

ในส่วนหน้าของ contact patch จะเกิดการอัดตัว และในส่วนท้ายจะเกิดการคลายตัว ทำให้การกระจายของแรงบน contact patch ไม่มีความสมมาตรตามที่แสดงในรูปที่ 3a

เราสร้างแบบจำลองของการกระจายตัวของแรงตามที่แสดงในรูปที่ 3b โดยสมมติให้ในส่วนหน้าของ contact patch ได้รับแรงขนาด N_1 กระทำที่ระยะห่างจาก OC เป็นระยะ e และส่วนหลังได้รับแรงขนาด $N_2 = (1 - \eta)N_1$ โดยที่ $0 < \eta \leq 1$ เป็นพารามิเตอร์ในแบบจำลอง กระทำที่ระยะ e เท่ากัน กำหนดให้แรงเสียดทานการกลิ้ง (rolling friction) มีขนาดเท่ากับ f ล้อมีน้ำหนักขนาด W และมีแรงดึงกระทำในแนวระดับผ่านจุด O เพื่อให้ความเร็วของวัตถุคงที่



รูปที่ 3 a) การกระจายแรงบน contact patch b) แบบจำลองการกระจายแรง

h) จงหาว่า N_1 และ N_2 เป็นกี่เท่าของ W (ตอบในรูปของ η)

[1.0 คะแนน]

i) จงหา f/W (ตอบในรูปของ η, e, R และ h)

[1.0 คะแนน]

ข้อที่ 2 ปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็กของฟาราเดย์

(Magneto-optical Faraday Effect)

[10 คะแนน]

สูตรคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยชน์สำหรับข้อนี้

- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
- $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin x \approx x$ และ $\cos x \approx 1$ เมื่อ $|x| \ll 1$
- $\frac{d}{dx} \sin(ax) = a \cos(ax)$ เมื่อ a คือค่าคงที่
- $\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \sin(ax)$ เมื่อ a คือค่าคงที่
- $(1+x)^n \approx 1+nx$ เมื่อ $|x| \ll 1$

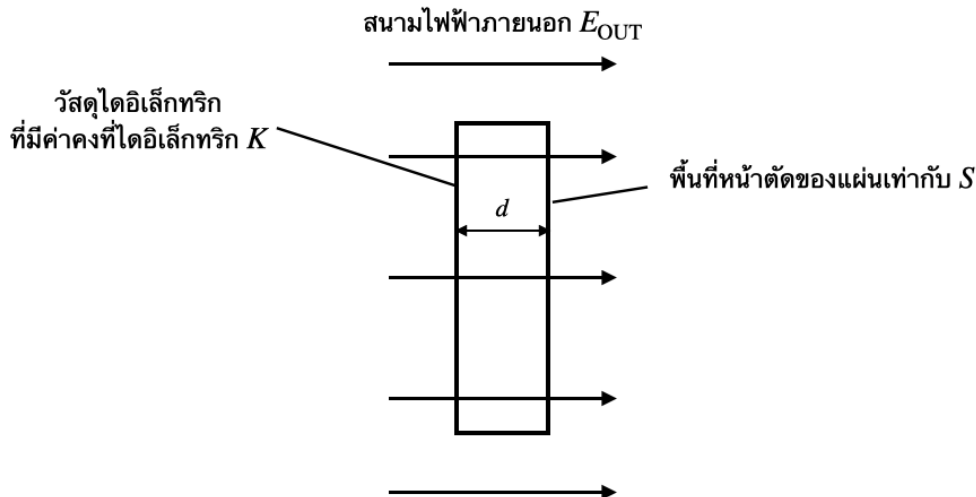
ในปี พ.ศ. 2388 (ค.ศ. 1845) ไมเคิล ฟาราเดย์ค้นพบอันตรกิริยาระหว่างแสงซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า กับสสาร ในการทดลองฟาราเดย์พบว่าเมื่อแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (linear polarized light) เคลื่อนที่ผ่านวัสดุ ที่ถูกวางอยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอกโดยทิศทางของสนามแม่เหล็กนั้นอยู่ในทิศทางเดียวกันกับทิศทางการ เคลื่อนที่ของคลื่นแสง ฟาราเดย์พบว่าเมื่อแสงเคลื่อนที่ออกจากวัสดุ ระนาบโพลาไรซ์ของคลื่นแสงนั้นจะถูกบิดไป

ในโจทย์ข้อนี้นักเรียนจะแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับหลักการของปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็กของ ฟาราเดย์

ไดอิเล็กทริกเป็นวัสดุที่ไม่นำไฟฟ้า เมื่อวางวัสดุประเภทนี้ไว้ในสนามไฟฟ้าจะเกิดประจุเหนี่ยวนำขึ้น บริเวณผิวของวัสดุ ทั้งนี้เนื่องมาจากการที่โมเมนต์ของวัสดุนี้ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดเป็นขั้วคู่ไฟฟ้า (electric dipole)

เพื่อที่จะเข้าใจกระบวนการเกิดขั้วคู่ไฟฟ้าและประจุเหนี่ยวนำบนวัสดุไดอิเล็กทริก ให้นักเรียนพิจารณา แบบจำลองที่ประกอบด้วยแผ่นวัสดุไดอิเล็กทริกที่มีพื้นที่หน้าตัด S และหนา d แผ่นวัสดุไดอิเล็กทริกนี้ถูกวางไว้ในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอที่มีขนาดเท่ากับ E_{OUT} โดยให้พื้นผิวของวัสดุตั้งฉากกับสนามไฟฟ้าภายนอก และบริเวณที่มีสนามไฟฟ้าภายนอกมีขนาดใหญ่กว่าขนาดของแผ่นวัสดุนี้มาก ๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 2.1 ค่าคงที่ ไดอิเล็กทริกของแผ่นวัสดุมีค่าเท่ากับ K และวัสดุไม่เป็นสารแม่เหล็ก

แผ่นวัสดุไดอิเล็กทริกที่ถูกเหนี่ยวนำจะเกิดขั้วคู่ไฟฟ้า โดยปริมาณขั้วคู่ไฟฟ้า (electric dipole) ทั้งหมด ต่อปริมาตรมีชื่อเรียกว่าโพลาไรเซชัน (Polarization) $\vec{P} = N\vec{p}$ เมื่อ N คือจำนวนขั้วคู่ไฟฟ้าต่อปริมาตรและ $\vec{p}$ คือค่าของขั้วคู่ไฟฟ้าหนึ่งตัว โดยโพลาไรเซชันจะมีความสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าภายในบริเวณเนื้อวัสดุ $\vec{E}$ ตาม สมการ $\vec{P} = \epsilon_0(K-1)\vec{E}$ และค่าดัชนีหักเหแสง n จะมีสมการเป็น $n = \sqrt{K}$ เมื่อ ϵ_0 คือค่าความยอม ในสุญญากาศ (permittivity of free space)



รูปที่ 2.1 แผ่นวัสดุไดอิเล็กทริกที่มีพื้นที่หน้าตัด S และหนา d แผ่นวัสดุไดอิเล็กทริกนี้ถูกวางไว้ในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ $\vec{E}_{OUT}$ โดยให้พื้นผิวของวัสดุตั้งฉากกับสนามไฟฟ้าภายนอก

ตอนที่ 1 อันตรกิริยาระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับวัสดุไดอิเล็กทริกที่วางอยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอก

คลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (linearly polarized light) สองขบวนที่มีความยาวคลื่น λ_L และคาบ T เท่ากัน คลื่นทั้งสองมีเฟสต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ และกำลังเคลื่อนที่ไปในทิศทาง $+z$ คลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นทั้งสองซ้อนทับกัน สนามไฟฟ้าลัพธ์ที่ตำแหน่ง z และเวลา t ใด ๆ มีสมการเป็น

$$\vec{E}_L(z, t) = E_0 \cos(k_L z - \omega t) \hat{i} + E_0 \sin(k_L z - \omega t) \hat{j} \quad \text{สมการที่ 1}$$

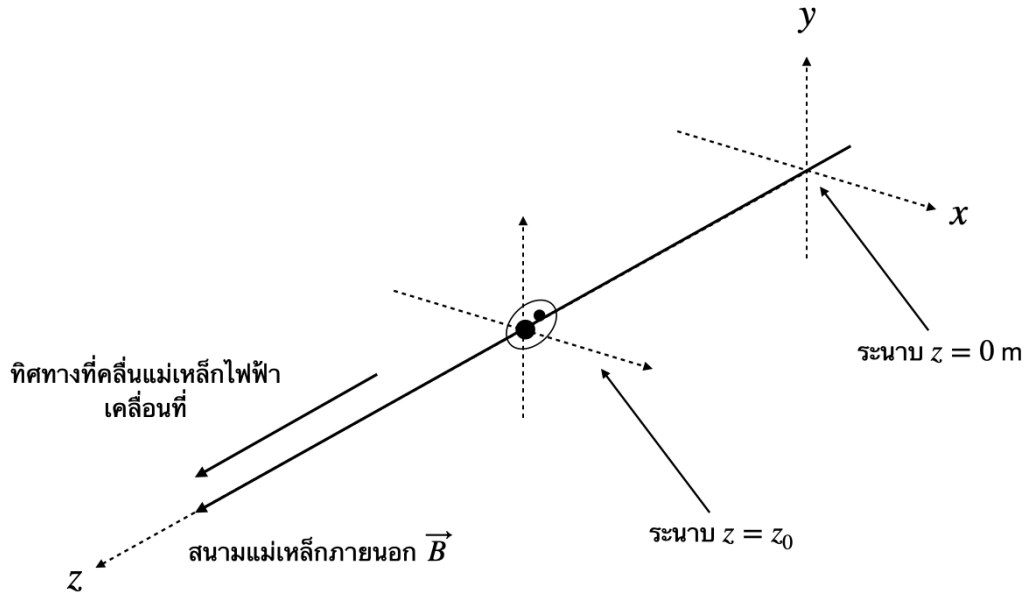
เมื่อ E_0 คือแอมพลิจูดของสนามไฟฟ้าของคลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นแต่ละขบวน

$k_L = \frac{2\pi}{\lambda_L}$ คือเลขคลื่น (wave number) ของคลื่นแสงเมื่อเคลื่อนที่ในตัวกลาง

ω คือความถี่เชิงมุมของคลื่นแสง

และ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตามแกน x และแกน y ตามลำดับ

a) จงวาดลูกศรเพื่อแสดงทิศทางและขนาดของสนามไฟฟ้าลัพธ์ที่เวลา $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}$ และ $\frac{3T}{4}$ บนระนาบ $z = 0$ เมตร ลงในกระดาษคำตอบ นักเรียนจะได้คะแนนเมื่อรูปที่วาดนั้นได้สัดส่วนถูกต้องตรงตามสเกล [0.8 คะแนน]



รูปที่ 2.2 รูปแสดงระบบฟิสิกส์ที่ใช้ในการคำนวณ โมเลกุลที่อยู่บนระนาบ $z = z_0$ เมตร จะถูกเหนี่ยวนำให้เป็นขั้วไฟฟ้าเมื่อมีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ผ่าน

ตัวกลางไดอิเล็กทริก (ที่ไม่เป็นสารแม่เหล็ก) ประกอบด้วยโมเลกุลที่มีลักษณะเหมือนกันจำนวนมากทำให้ตัวกลางไดอิเล็กทริกมีเนื้อสม่ำเสมอ แบบจำลองอย่างง่ายของโมเลกุลประกอบด้วยอนุภาคที่มีประจุเป็นบวกกับอิเล็กตรอน โดยอนุภาคที่มีประจุบวกจะมีมวลมากกว่ามวลของอิเล็กตรอนมาก ๆ ในสภาวะปกติโมเลกุลจะเป็นกลางทางไฟฟ้าโดยจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาคที่มีประจุบวกและอิเล็กตรอนอยู่นิ่งบนแกน z เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีสมการตามสมการที่ 1 เคลื่อนที่ผ่าน อิเล็กตรอนที่อยู่ในโมเลกุลจะทำอันตรกิริยากับสนามไฟฟ้าของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กภายนอก $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ เมื่อ $\hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตามแกน z (ไม่ต้องคำนึงถึงผลของสนามแม่เหล็กจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเพราะมีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงอื่น ๆ) ทำให้อิเล็กตรอนมวล m มีประจุไฟฟ้า $-e$ เกิดการกระจัดยั้งผล (effective displacement) $\vec{r}$ จากแกน z โดยการกระจัดยั้งผล $\vec{r}$ อยู่บนระนาบ xy ด้วยเหตุนี้โมเลกุลจึงเปลี่ยนสภาพเป็นขั้วไฟฟ้า ณ ขณะที่เกิดขั้วไฟฟ้าอนุภาคที่มีประจุบวกจะออกแรงดึงอิเล็กตรอนกลับสู่สมดุลเดิม โดยขนาดของแรง F เป็นไปตามกฎของฮุกโดยมีสมการเป็น

$$F = \beta r$$

สมการที่ 2

เมื่อ $\beta = m\omega_0^2$ และ ω_0 คือค่าคงที่และ r คือขนาดของการกระจัด $\vec{r}$

นอกจากนี้อิเล็กตรอนในวัสดุยังเกิดการชนกันทำให้เกิดการสูญเสียพลังงาน โดยแบบจำลองของการสูญเสียพลังงานนี้สามารถเขียนออกมาในรูปแบบของแรงต้านการเคลื่อนที่ที่แปรผันตรงกับความเร็วยังอิเล็กตรอน โดยขนาดของแรงต้าน f มีสมการเป็น

$$f = bv \quad \text{สมการที่ 3}$$

เมื่อ b คือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านและ v คืออัตราเร็วของอิเล็กตรอน

ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่นักเรียนไม่ต้องคำนึงถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เป็นประจุบวกในขั้วคู่ไฟฟ้า เนื่องจากมวลของส่วนนี้มีค่ามากกว่ามวลของอิเล็กตรอนมาก ๆ และขนาดของโมเมนต์มีขนาดเล็กกว่าความยาวคลื่นมาก ๆ

b) จงใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเขียนสมการของความเร่งของอิเล็กตรอนที่เกิดจากแรงไฟฟ้าจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า, แรงดึงดูด (แรงในสมการที่ 2), แรงจากสนามแม่เหล็กภายนอก และ แรงต้านการเคลื่อนที่ (แรงในสมการที่ 3) โดยอิเล็กตรอนอยู่ในระนาบ xy มีตำแหน่งอยู่ที่ x และ y และมีความเร็ว $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$ [1.7 คะแนน]

ในการคำนวณต่อจากนี้ เราสมมติให้ b มีค่ามากพอที่จะทำให้การสั่นในโหมดความถี่ธรรมชาติหายไป แต่ b ก็มีค่าน้อยมากจนละทิ้งพจน์ของแรงต้านได้

c) กำหนดให้ผลเฉลยของสมการในข้อ (b) เมื่อตัดแรงต้านจะอยู่ในรูป

$$\vec{r}(t) = x_0 \cos(k_L z - \omega t) \hat{i} + y_0 \sin(k_L z - \omega t) \hat{j}$$

โดยที่

$$x_0 = y_0 = \frac{\Omega_c E_0}{B_0} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Omega_c \omega} \right]$$

จงหา Ω_c ในรูปของตัวแปรและค่าคงที่อื่น ๆ ที่โจทย์กำหนดให้

[1.9 คะแนน]

d) กำหนดให้จำนวนขั้วคู่ไฟฟ้าต่อปริมาตรในตัวกลางไดอิเล็กทริกมีค่าเท่ากับ N

จงหาค่าดัชนีหักเหแสง n_L ของวัสดุไดอิเล็กทริกเมื่อคลื่น $\vec{E}_L$ เคลื่อนที่ผ่าน โดยเขียน n_L ในรูปของตัวแปรอื่น ๆ ที่โจทย์กำหนดให้

[0.9 คะแนน]

e) หากคลื่นแสงในวัสดุไดอิเล็กทริกมีสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามสมการ

$$\vec{E}_R(z, t) = E_0 \cos(k_R z - \omega t) \hat{i} - E_0 \sin(k_R z - \omega t) \hat{j}$$

จงอธิบายการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่ระนาบ xy ใด ๆ กำหนดให้ผู้สังเกตมองในทิศตรงข้ามกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่นแสง

[0.2 คะแนน]

f) จงใช้ผลจากข้อก่อนหน้าเขียนค่าดัชนีหักเหแสง n_R ของวัสดุไดอิเล็กทริกเมื่อคลื่น $\vec{E}_R$ เคลื่อนที่ผ่าน โดยเขียน n_R ในรูปของตัวแปรอื่น ๆ ที่โจทย์กำหนดให้

[0.4 คะแนน]

ตอนที่ 2 ปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็กของฟาราเดย์

ในการทดลองปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็กของฟาราเดย์ วัสดุไดอิเล็กทริก (รูปทรงกระบอกเล็กในรูปที่ 2.3) ที่ใช้ในการทดลองจะถูกวางไว้ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ $\vec{B}$ ที่สร้างจากโซลินอยด์ (รูปทรงกระบอกใหญ่ในรูปที่ 2.3) โดยให้สนามแม่เหล็กมีทิศทางเดียวกับทิศทางที่คลื่นแสงเคลื่อนที่ คลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นที่มีสนามไฟฟ้าตามแนวแกน x โดยมีสมการเป็น

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{i} \quad \text{สมการที่ 4}$$

เมื่อ E_0 คือแอมพลิจูดของสนามไฟฟ้าของคลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ คือเลขคลื่นของคลื่นแสงเมื่อเคลื่อนที่ในสุญญากาศและ λ คือความยาวคลื่น

g) คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสมการที่ 4 สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\vec{E}(z, t) = a_L \vec{E}_L(z, t) + a_R \vec{E}_R(z, t)$

จงหาค่าคงที่ a_L และ a_R

[0.2 คะแนน]

เมื่อคลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นมีสนามไฟฟ้าตามสมการที่ 4 เคลื่อนที่เข้าไปในวัสดุที่ตำแหน่ง $z = 0$ เมตร หลังจากเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง z เมตร ระบุว่าโพลาไรซ์ของคลื่นแสงจะบิดไปเป็นมุม $\Phi(z)$

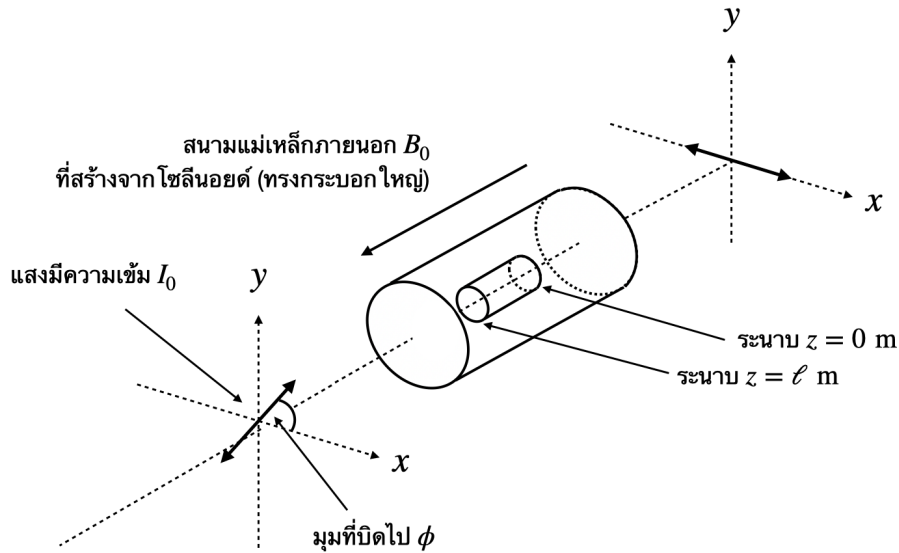
ผลของดัชนีหักเหแสงของคลื่นแสงที่มีสนามไฟฟ้าเป็น $\vec{E}_L(z, t)$ และ $\vec{E}_R(z, t)$ มีค่าไม่เท่ากัน ทำให้ผลรวมของสนามไฟฟ้าในวัสดุอยู่ในรูป

$$\vec{E}(z, t) = E_0 [\cos(\Phi(z)) \hat{i} + \sin(\Phi(z)) \hat{j}] \cos(k_T z - \omega t) \quad \text{สมการที่ 5}$$

h) จงหามุม $\phi = \Phi(\ell)$ ในรูปของ n_L, n_R, ℓ และ λ และ จงหา k_T ในรูปของ n_L, n_R และ k

กำหนดให้ทิศทางของมุม ϕ ที่บิดไปมีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่ในทิศทางดังที่แสดงในรูปที่ 2.3

[1.2 คะแนน]



รูปที่ 2.3 แสดงการจัดวางอุปกรณ์ในการทดลองปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็กของฟาราเดย์

นักเรียนสามารถเขียนแนวโพลาไรซ์ของคลื่นแสงที่บิดไปเป็นมุม ϕ ในรูปของสมการ

$$\phi = V\ell B \quad \text{สมการที่ 6}$$

เมื่อ V คือค่าคงที่เวอร์เดต์ (Verdet constant) โดย V จะมีค่าเป็นบวกเมื่อระนาบการสั่นของสนามไฟฟ้าหมุนไปในทิศทางที่แสดงในรูปที่ 2.3

ในกรณีที่สนามแม่เหล็ก B_0 มีค่าเท่ากับศูนย์ ค่าดัชนีหักเหแสง $n_R = n_L = n_0$

i) ในทางปฏิบัติขนาดของสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าน้อยซึ่งทำให้ $\omega\Omega_C \ll \omega_0^2 - \omega^2$

นักเรียนจึงสามารถประมาณค่าคงที่เวอร์เดต์ $V \approx V_0 \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$

จงหาค่าคงที่ V_0 ในรูปของตัวแปรอื่น ๆ ที่โจทย์กำหนดให้

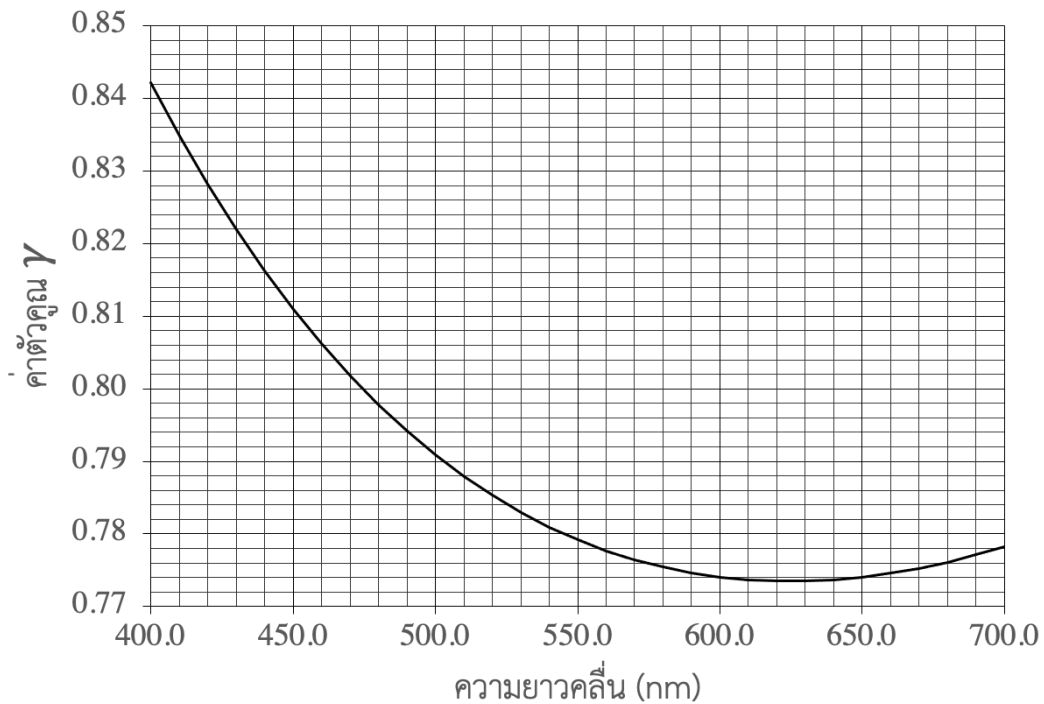
[1.4 คะแนน]

หากคำนึงถึงผลของสมบัติทางแม่เหล็กของตัวกลาง ค่าคงที่เวอร์เดต์จะแตกต่างจากสมการในข้อ i) ด้วยตัวคูณ γ ดังนั้นค่าคงที่ของเวอร์เดต์จะมีสมการเป็น $V = \gamma V_0 \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$ โดยที่ค่าตัวคูณ γ มีชื่อเรียกว่า magneto-optic anomaly รูปที่ 2.4 แสดงค่าตัวคูณ γ ที่ค่าความยาวคลื่นต่าง ๆ สำหรับแก้ว BK7 และความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีหักเหแสงกับความยาวคลื่นแสงของแก้ว BK7 เป็นไปตามสมการ

$$n_0^2 = 1 + \frac{1.265\lambda^2}{\lambda^2 - 96.65^2} \quad \text{สมการที่ 7}$$

เมื่อ λ คือความยาวคลื่นวัดในหน่วยนาโนเมตรและวัดในสุญญากาศ

และกำหนดให้ $\omega_0 = 1.950 \times 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ และอัตราเร็วแสงในสุญญากาศ $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$



รูปที่ 2.4 ค่าตัวคูณ γ ที่ค่าความยาวคลื่นต่าง ๆ ในสุญญากาศสำหรับแก้ว BK7

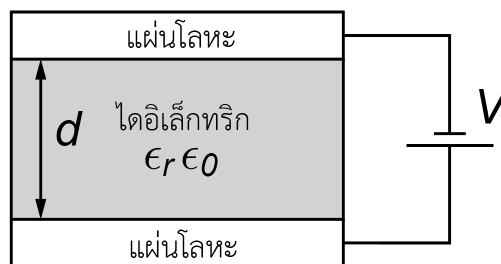
j) จงคำนวณหาค่าคงที่เวอร์เดต์ (Verdet constant) ของแก้ว BK7 ที่ความยาวคลื่น 510 nm ในสุญญากาศ หากนักเรียนไม่สามารถหาค่า V_0 จากข้อ i) ให้นักเรียนติดค่า V_0 ไว้ พร้อมระบุหน่วยของค่าคงที่เวอร์เดต์ในระบบ SI [1.1 คะแนน]

k) จงคำนวณมุมที่ระนาบการสั่นของสนามไฟฟ้าบิดไป ϕ เมื่อคลื่นแสงโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นมีความยาวคลื่น 510 nm เคลื่อนที่ผ่านแก้ว BK7 กำหนดให้แท่งแก้วมีความยาว 10.0 cm และสนามแม่เหล็กจากโซลินอยด์มีค่าเท่ากับ 5.0 mT ให้ตอบในหน่วยองศา [0.2 คะแนน]

ข้อที่ 3 Quantum Capacitance

[10 คะแนน]

พิจารณาตัวเก็บประจุแบบแผ่นโลหะขนานที่มีระยะห่างระหว่างแผ่นเป็น d และมีฉนวนคั่นกลางซึ่งมีค่าความยอมในไดอิเล็กทริกเป็น $\epsilon_r \epsilon_0$ เมื่อ ϵ_r เป็นค่าคงตัวไดอิเล็กทริก ตัวเก็บประจุต่อเข้ากับความต่างศักย์คงที่ V ($V > 0$) กำหนดให้ประจุของอิเล็กตรอน $-e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ($e > 0$) และ มวลของอิเล็กตรอน $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ กำหนดให้ขนาดความกว้างและยาวของแผ่นโลหะนั้นมากกว่าระยะ d มากๆ



- a) จงหาค่าความหนาแน่นต่อพื้นที่ของจำนวนอิเล็กตรอน n ของแผ่นโลหะแผ่นบน
ในรูปของ V และตัวแปรอื่นที่โจทย์กำหนด

[1.0 คะแนน]

- b) จงหาค่าความจุต่อพื้นที่ของตัวเก็บประจุ C_G

[0.4 คะแนน]

จากนี้เราจะศึกษาผลกระทบต่อค่าความจุจากหลักการกีดกันของเพาลี ซึ่งมาจากสมบัติทางควอนตัมของอิเล็กตรอน หลักการกีดกันของเพาลีกล่าวว่า อิเล็กตรอนสองตัวใดๆจะไม่สามารถมีสถานะแบบเดียวกันได้ เพื่อที่จะเข้าใจหลักการกีดกันของเพาลีให้ดียิ่งขึ้นเราจะพิจารณาระบบสมมติที่อิเล็กตรอนถูกกักขังอยู่ใน 1 มิติ ความยาว a โดยอิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระไม่ได้อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ใดๆในระยะ a นี้

ในระบบนี้เราจะมองว่าอิเล็กตรอนประพฤติตัวเป็นคลื่น โดยความยาวคลื่น λ กับโมเมนตัม p ของอิเล็กตรอนมีความสัมพันธ์ตามหลักของเดอบรอยล์เป็น

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

โดยที่ค่าคงตัวของพลังค์ $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$

อิเล็กตรอนในระบบนี้จะทำตัวเป็นคลื่นนิ่งในระยะความยาว a โดยที่จุดปลายทั้งสองข้างของคลื่นนิ่งเป็นบัพ

- c) จงหาค่าความยาวคลื่น λ ที่ยาวที่สุดอันดับที่ 1 (λ_1), ที่ 2 (λ_2), และที่ n (λ_n)

[0.8 คะแนน]

d) จงหาค่าพลังงานจลน์ E_n ของอิเล็กตรอน

[0.7 คะแนน]

เนื่องจากอิเล็กตรอนมีสมบัติภายในที่เรียกว่าสปินซึ่งมีทิศได้สองทิศคือชี้ขึ้น ($s = \uparrow$) และชี้ลง ($s = \downarrow$) ดังนั้นสถานะของอิเล็กตรอนที่ถูกกักขังนี้จะถูกกำหนดได้โดยค่าความยาวคลื่นและทิศของสปิน (λ, s) จากหลักการกีดกันของเพาลี อิเล็กตรอนสองตัวใด ๆ ไม่สามารถที่จะมีความยาวคลื่นและทิศของสปินที่เหมือนกันได้ (อิเล็กตรอนในสถานะ $(\lambda_n, \uparrow)$ และ $(\lambda_n, \downarrow)$ มีพลังงานที่เท่ากัน)

e) ที่อุณหภูมิ $T = 0$ K อิเล็กตรอนจะครอบครองสถานะที่มีพลังงานต่ำสุดก่อน

จงหาสถานะที่ถูกครอบครอง เขียนในรูปแบบ (λ, s) สำหรับอิเล็กตรอนแต่ละตัว

เมื่อมีอิเล็กตรอน 4 ตัวที่โดนกักขัง

[1.0 คะแนน]

(เขียน λ ในรูปของ a และไม่ต้องคำนึงถึงผลจากแรงคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน)

f) จงหาพลังงานจลน์สูงสุด E_F ที่ถูกครอบครองถ้ามีอิเล็กตรอน N ตัว ที่ $T = 0$ K

(พิจารณาแยกรณีที่ N เป็นเลขคู่และคี่)

[0.8 คะแนน]

การที่เราจะเห็นความเป็นขึ้นระดับพลังงานนั้น ระยะห่างระหว่างระดับพลังงานที่อยู่ติดกันต้องมากกว่าค่าพลังงานความร้อน $k_B T$ โดยที่ค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K และ T คืออุณหภูมิ

g) จงหาความกว้างที่มากที่สุด $a_{\max}$ ที่ยังสามารถแยกทุกระดับพลังงานออกจากกันได้

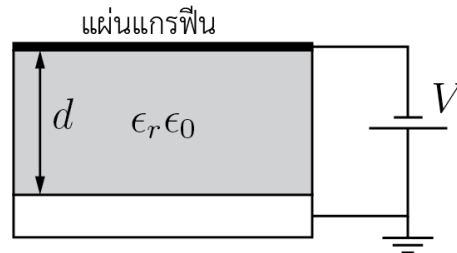
ที่ $T = 300$ K

[0.8 คะแนน]

แผ่นโลหะปกติที่นำมาทำตัวเก็บประจุมีความหนาจนระดับพลังงานจลน์อยู่ติดกันจนไม่สามารถแยกแยะแต่ละระดับออกจากกันได้ เราจึงไม่พบเห็นผลจากหลักการกีดกันของเพาลีในตัวเก็บประจุทั่วไป เพื่อที่จะเห็นผลจากหลักการกีดกันของเพาลี พิจารณาตัวเก็บประจุแบบแผ่นโลหะขนานที่แผ่นด้านหนึ่งถูกแทนที่ด้วยแกรฟีนซึ่งหนาเพียงหนึ่งอะตอม แกรฟีนประพฤติตัวเป็นแผ่นตัวนำไฟฟ้าสองมิติ ความเป็นสองมิติของแกรฟีนทำให้หลักการกีดกันของเพาลีมีผลกระทบมากขึ้นเมื่อเทียบกับแผ่นโลหะสามมิติ อิเล็กตรอนที่ถูกใส่ในแกรฟีนจะถูกใส่ในระดับพลังงานจลน์ที่สูงขึ้นและค่าพลังงานจลน์สูงสุดที่ถูกครอบครองโดยอิเล็กตรอนในแกรฟีนคือ

$$E_F = \hbar v_F \sqrt{\pi n}$$

โดยที่ $\hbar \equiv h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$, $v_F = 1.15 \times 10^6 \text{ m/s}$ และ n คือความหนาแน่นต่อพื้นที่ของจำนวนอิเล็กตรอน



พลังงานของอิเล็กตรอนแต่ละตัวในแผ่นโลหะและแผ่นแกรฟีนนั้นมาจากผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ไฟฟ้าจากความต่างศักย์ไฟฟ้าที่เราใส่เข้าไป ตอนที่ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์นั้นพลังงานของอิเล็กตรอนในแผ่นโลหะและแผ่นแกรฟีนมีค่าเท่ากัน กำหนดให้ว่าพลังงานนี้มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อใส่ความต่างศักย์ V ดังภาพอิเล็กตรอนในโลหะจะไหลเข้าสู่แผ่นแกรฟีนจนกระทั่งอิเล็กตรอนในแกรฟีนมีความหนาแน่นต่อพื้นที่ของจำนวนอิเล็กตรอนเท่ากับ n โดยพลังงานที่ใส่เข้าไปจากแบตเตอรี่จะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ไฟฟ้าของอิเล็กตรอน

h) เนื่องจากระดับพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแผ่นโลหะอยู่ชิดกันมาก เราสามารถประมาณได้ว่าพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนทุกตัวที่ถูกใส่เข้าไปหรือเอาออกจากแผ่นโลหะมีค่าเดียวกัน จงหาพลังงานสูงสุดของอิเล็กตรอนในแผ่นโลหะ E_{metal} เมื่อใส่ความต่างศักย์ V [0.6 คะแนน]
(กำหนดให้ค่าศักย์ไฟฟ้า ณ จุดที่ต่อกับสายดินเป็นศูนย์)

i) จงหาค่าพลังงานศักย์ไฟฟ้า U_{elec} ของอิเล็กตรอนแต่ละตัวในแกรฟีนเนื่องจากสนามไฟฟ้าระหว่างตัวเก็บประจุ ตอบในรูปของ n และค่าคงที่อื่นที่โจทย์กำหนด [0.6 คะแนน]
(ไม่ต้องคำนึงถึงผลจากแรงคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่ในแผ่นเดียวกันเอง)

j) เมื่อระบบอยู่ในสมดุล พลังงานสูงสุดของอิเล็กตรอนในแผ่นโลหะและแกรฟีนจะต่างกันเป็น eV จงแสดงว่าความหนาแน่นต่อพื้นที่ของจำนวนอิเล็กตรอน n ในแกรฟีน ในรูปของ V ได้เป็น

$$n = \left(-\sqrt{n_0} + \sqrt{n_0 + \frac{C_G V}{e}} \right)^2$$

โดยที่ C_G คือค่าความจุต่อพื้นที่จากข้อ b กรณีไม่คำนึงถึงหลักการกีดกันของเพาลี และ จงหา n_0 ในรูปของตัวแปรที่โจทย์กำหนด [1.4 คะแนน]

k) ค่าความจุต่อพื้นที่ C_{tot} สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$\frac{1}{C_{tot}} \equiv \frac{1}{e} \frac{dV}{dn} = \frac{1}{C_G} + \frac{1}{C_Q}$$

C_Q คือค่าความจุควอนตัมต่อพื้นที่ จงหา C_Q

[1.5 คะแนน]

l) ในการทดลองสารไดอิเล็กทริกทำจาก SiO_2 ความหนา $d = 300 \text{ nm}$, และค่าคงที่ไดอิเล็กทริก $\epsilon_r = 3.9$

ถ้า $V = 10.0 \text{ mV}$ จงหาค่า n ในกรณีที่ตัวเก็บประจุทำจากแผ่นโลหะสามมิติทั้งคู่ (กรณีข้อ a)

และกรณีที่แผ่นหนึ่งเป็นแกรฟีน (กรณีข้อ j)

[0.4 คะแนน]

ค่าคงที่ที่อาจจะต้องใช้

ประจุของอิเล็กตรอน $-e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

มวลของอิเล็กตรอน $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

ค่าคงตัวของพลังค์ $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$

ค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

ค่าความยอมในสุญญากาศ $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$

$v_F = 1.15 \times 10^6 \text{ m/s}$

***** จบข้อ 3 *****