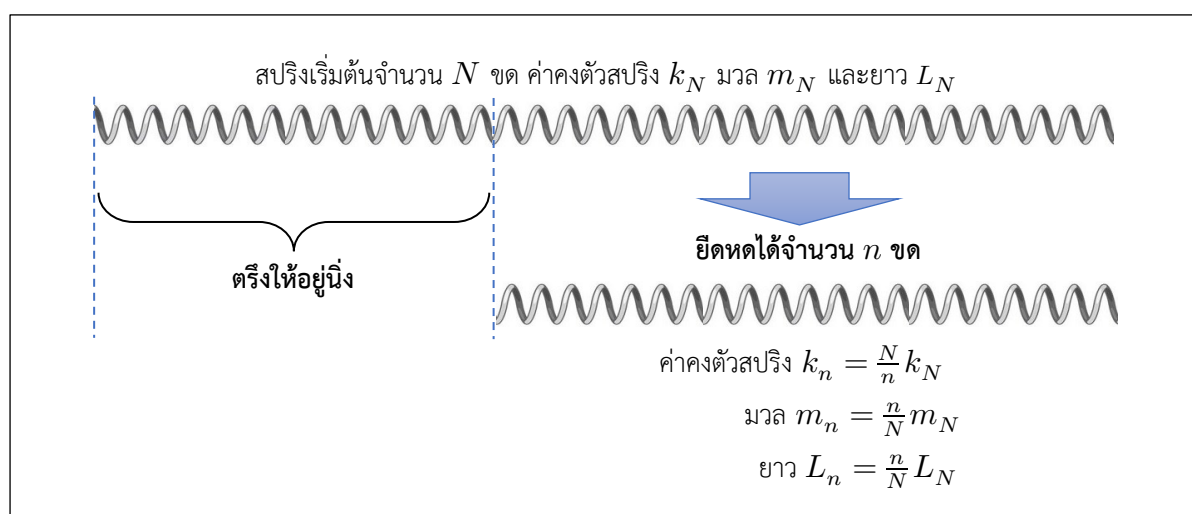


สลิงกีและการสั่นเพนดูลัมแบบควบคู่ (Slinky & Coupled Pendulum) [20 คะแนน]

การสั่นแบบควบคู่ (coupled oscillation) เป็นกระบวนการสั่นที่เกิดขึ้นระหว่างสองวัตถุ (หรือหลายวัตถุ) หรือระบบที่มีกลไกเชื่อมโยงกัน โดยที่การสั่นหรือการเคลื่อนไหวของแต่ละวัตถุจะมีผลต่อกันและกัน ทำให้แต่ละวัตถุสั่นแบบมีความสัมพันธ์กันและมีการถ่ายเทพลังงานไปมาระหว่างวัตถุ เช่น การสั่นของเพนดูลัมแบบควบคู่ (coupled pendulum) ที่ประกอบด้วยลูกตุ้มที่แขวนจากคานด้วยเชือกและมีสปริงเชื่อมต่อกันระหว่างลูกตุ้มทั้งสอง เมื่อแกว่งลูกตุ้มที่หนึ่งจะมีแรงและพลังงานส่งผ่านสปริงไปยังลูกตุ้มที่สอง ทำให้ลูกตุ้มที่สองแกว่งด้วยเช่นกัน การแกว่งของลูกตุ้มทั้งสองจะมีความสัมพันธ์กันดังที่นักเรียนจะได้ทำการทดลองต่อไป

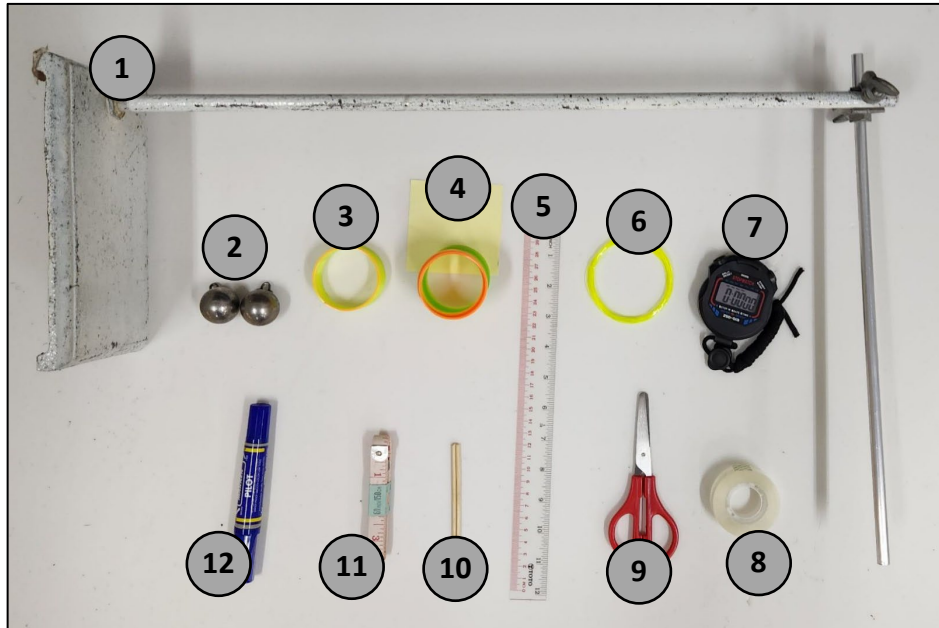
หากเรานำสปริงสม่ำเสมออันหนึ่งที่ตั้งต้นมีจำนวน N ขด ค่าคงตัวสปริง k_N มวล m_N ความยาวเริ่มต้น L_N มาตริ้งบางส่วนและให้ส่วนที่เหลือยืดหดได้จำนวน n ขด เราจะพบว่าค่าคงตัวสปริงของส่วนที่ยังยืดหดได้มีค่า $k_n = \frac{N}{n} k_N$ มีมวล $m_n = \frac{n}{N} m_N$ และมีความยาว $L_n = \frac{n}{N} L_N$ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1. สมบัติต่างๆ ของสปริงเมื่อเหลือส่วนที่ยืดหดได้จำนวน n ขดจากทั้งหมด N ขด

อีกนัยหนึ่ง หากเรารู้สมบัติของสปริงขนาด $n = 1$ ขด เราสามารถคำนวณหาสมบัติของสปริง N ขดจากสมการ $k_N = \frac{1}{N} k_1$, $m_N = N m_1$ และ $L_N = N L_1$

อุปกรณ์



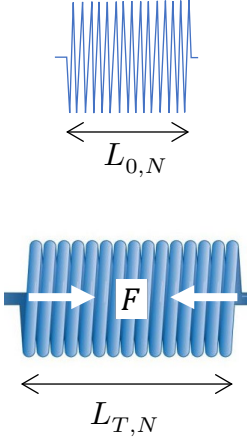
รูปที่ 2. อุปกรณ์ที่ให้มาทั้งหมดสำหรับการทดลองทั้ง 3 ตอน

1. ขาตั้งและคานสำหรับแขวน
2. ลูกตุ้ม 2 ลูก
3. สปริง (สลิงกี้) อันสั้น ขนาด 12 ขด
4. สปริง (สลิงกี้) อันยาว ขนาด 20 ขดขึ้นไป และกระดาดหระบรมวลในหน่วยกรัม
5. ไม้บรรทัด
6. เส้นเอ็น 1 ขดยาวประมาณ 4 เมตร
7. นาฬิกาจับเวลา
8. เทปใส
9. กรรไกร
10. ไม้ลูกชิ้น 2 ท่อน
11. สายวัด
12. ปากกาเคมีสำหรับทำเครื่องหมาย

ตอนที่ 1 การยืดเนื่องจากน้ำหนักของสปริง

[7.5 คะแนน]

สปริงที่มีเส้นลวดขนาดใหญ่หรือหนาอาจไม่สามารถหดไปสู่ความยาวธรรมชาติที่แท้จริงได้ เพราะแต่ละขดจะดันกันและกันเมื่อหดมาชิดติดกัน



สมมติว่ามีสปริงที่ทำด้วยลวดขนาดเล็กจำนวน N ขด โดยที่แต่ละขดของสปริงไม่ชิดติดกัน มันจะมีความยาวธรรมชาติ $L_{0,N}$ หรือหากคิดความยาวต่อ 1 ขด จะเท่ากับ $L_{0,1} = \frac{1}{N} L_{0,N}$

หากใช้ลวดเส้นใหญ่ โดยคงสมบัติอื่นไว้เหมือนเดิม สปริงแต่ละขดอาจจะดันกันและกัน ทำให้มีความยาวมากกว่าความยาวธรรมชาติ ไม่สามารถหดไปสู่ความยาวธรรมชาติที่แท้จริงได้ และมีแรงอัด F เข้าหากัน (initial tension) ถ้าความหนาของลวด N ขดเท่ากับ $L_{T,N}$ แล้วความหนาต่อ 1 ขดจะเท่ากับ $L_{T,1} = \frac{1}{N} L_{T,N}$

รูปที่ 3. สปริงที่มีแรงอัดเริ่มต้น (initial tension)

หากแขวนสปริงอ่อนในแนวตั้งภายใต้แรงโน้มถ่วง สปริงจะยืดออกชัดเจนเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง เราพบว่าตำแหน่ง y_n ของสปริงขดที่ n เมื่อวัดจากปลายด้านล่าง (ดูรูปที่ 4.) จะเป็นไปตามสมการ

$$y_n = nL_{0,1} + \frac{m_1 g}{2k_1} n^2 \quad (1)$$

เมื่อความโน้มถ่วงที่ผิวโลก $g = 9.78 \text{ m/s}^2$

เทอมแรกในสมการ (1) คือความยาวธรรมชาติของสปริง เทอมหลังคือความยาวที่เพิ่มขึ้นจากการยืดเนื่องจากน้ำหนักของสปริง

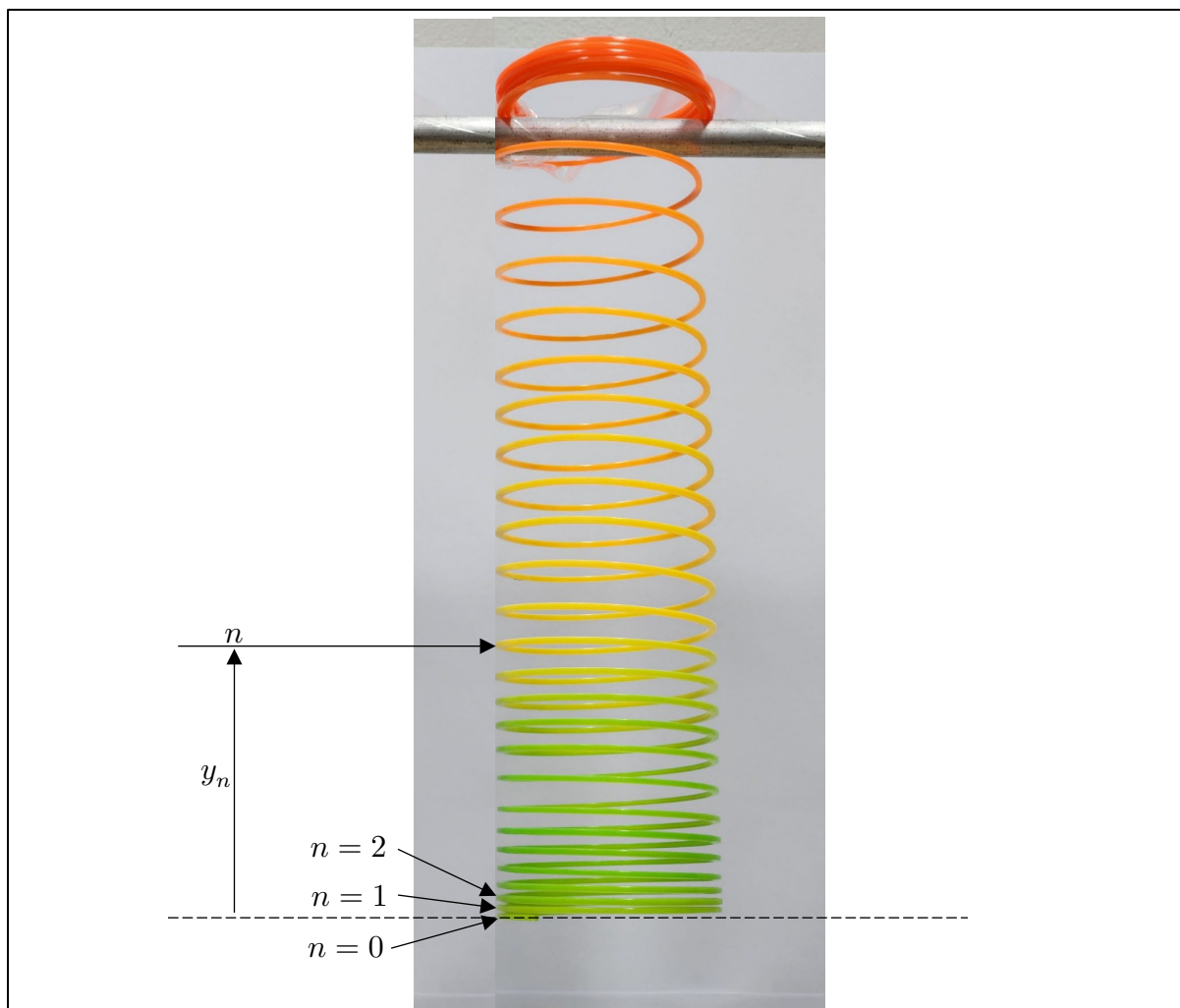
คำสั่ง

การทดลองนี้เพื่อหาความยาวธรรมชาติและค่าคงตัวสปริงด้วยกราฟเส้นตรง พร้อมวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน

กำหนดให้ใช้ความโน้มถ่วงที่ผิวโลก $g = 9.78 \text{ m/s}^2$ ให้บันทึกค่าต่างๆ จากการวัดและคำตอบจากการคำนวณในกระดาษสรุปคำตอบ พร้อมค่าคลาดเคลื่อน

1. ใช้สปริงอันยาว สำหรับการทดลองนี้ ไม่ต้องตัดสปริง ตามรูปที่ 4.
2. อ่านรหัสชุดทดลอง อ่านค่ามวลของสปริงทั้งอันจากกระดาษ นับจำนวนขดทั้งหมดของสปริง และคำนวณมวล m_1 ของสปริง 1 ขด
3. อาจใช้ปากกาเคมีทำเครื่องหมายบนสปริงเพื่อความสะดวกในการนับจำนวนขดสปริง
4. หาความยาว $L_{T,1}$ ของสปริง
5. หากคานไม่วางตัวในแนวระดับ ให้ขยับที่ยึดจนคานวางตัวในแนวระดับ
6. แขนสปริงกับคานโดยใช้เทปใสช่วยยึดด้านบน ให้มีส่วนที่ห้อยลงมากกว่า 22 ขด ขยับตำแหน่งที่ยึดให้สปริงวางตัวในแนวตั้ง ใช้เทปใสช่วยยึด ไม่ต้องยึดให้แน่นเกินไปเพราะต้องมีการถอดออก จากคานสำหรับการทดลองต่อไป
7. รอประมาณ 3 นาทีหลังจากแขวนสปริงเพื่อให้วัสดุคลายตัวและอยู่ในสมดุล แล้วหาค่า y_n ที่ n ต่างกันจำนวน 10 ค่า (ไม่ต้องวัดซ้ำ) เขียนวิธีหาค่า y_n ในกระดาษสรุปคำตอบ
8. ใช้กราฟเส้นตรงระหว่าง $\frac{y_n}{n}$ กับ n พร้อม error bar เพื่อหาค่า k_1 และ $L_{0,1}$
9. หาอัตราส่วน $\frac{L_{0,1}}{L_{T,1}}$

รูปการทดลองตอนที่ 1

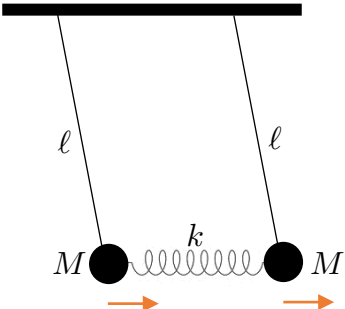
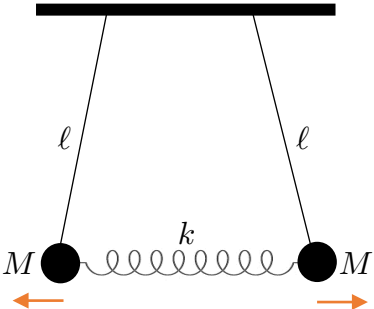


รูปที่ 4. รูปการทดลองตอนที่ 1

ตอนที่ 2 เพนดูลัมแบบควบคู่ (Coupled Pendulum)

[7.3 คะแนน]

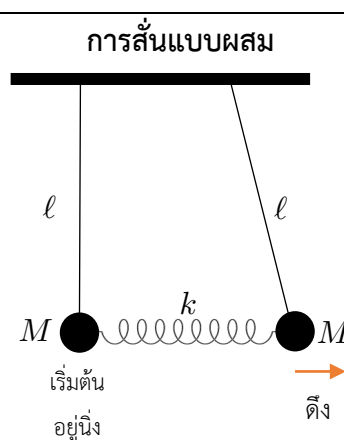
เมื่อห้อยลูกตุ้มมวล M จำนวนสองก้อนด้วยเชือก โดยมีระยะจากจุดแขวนไปยังจุดศูนย์กลางมวล ℓ เท่ากัน และเชื่อมกันด้วยสปริง จะมีการสั่นของนอร์มัลโหมด (normal mode) ในระนาบของเส้นเชือกอยู่ 2 แบบ ซึ่งเป็นการสั่นที่ลูกตุ้มทั้งสองมีความถี่เท่ากันและมีผลต่างของเฟสคงตัว

นอร์มัลโหมด 1	นอร์มัลโหมด 2
 ลูกตุ้มทั้งคู่แกว่งซ้ายขวาพร้อมกันด้วยเฟสเดียวกัน และแอมพลิจูดเท่ากัน ความถี่เชิงมุมของการสั่นในโหมดนี้ $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (2)$ (ไม่ขึ้นกับค่า k เพราะสปริงไม่ยืดไม่หด)	 ลูกตุ้มทั้งสองมีเฟสการสั่นตรงกันข้าม และมีแอมพลิจูดเท่ากัน ความถี่เชิงมุมของการสั่นในโหมดนี้ $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{M}} \quad (3)$ (เชื่อมโยงการสั่นผ่านสปริง)

เราสามารถทำให้ลูกตุ้มแกว่งแบบอื่นๆ ได้ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นที่ต่างกัน ซึ่งการแกว่งแบบอื่นๆ จะเป็นการผสมกันระหว่างการแกว่งของนอร์มัลโหมด 1 และ นอร์มัลโหมด 2

จากรูปด้านขวา จับลูกตุ้มลูกซ้ายให้อยู่นิ่งในตอนเริ่มต้น แล้วดึงลูกตุ้มลูกขวาออกจากจุดสมดุลไปทางขวาเล็กน้อย แล้วปล่อยลูกตุ้มทั้งสองพร้อมกัน การเชื่อมโยงผ่านสปริงจะทำให้ลูกตุ้มซ้ายมือค่อยๆ แกว่งแรงขึ้น เมื่อลูกตุ้มลูกหนึ่งแกว่งด้วยแอมพลิจูดที่โตที่สุด ลูกตุ้มอีกลูกจะหยุดนิ่งพอดี (แอมพลิจูดน้อยสุด) การผสมกันของทั้งสองความถี่คล้ายกับการเกิดบีตส์ หากจับเวลาที่ลูกตุ้มลูกหนึ่งหยุดนิ่งจนกระทั่งลูกตุ้มลูกเดิมกลับมาหยุดนิ่งอีกครั้ง จะได้คาบ T_b ตามสมการ

$$\frac{2\pi}{T_b} = \omega_2 - \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{M}} - \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (4)$$



คำสั่ง

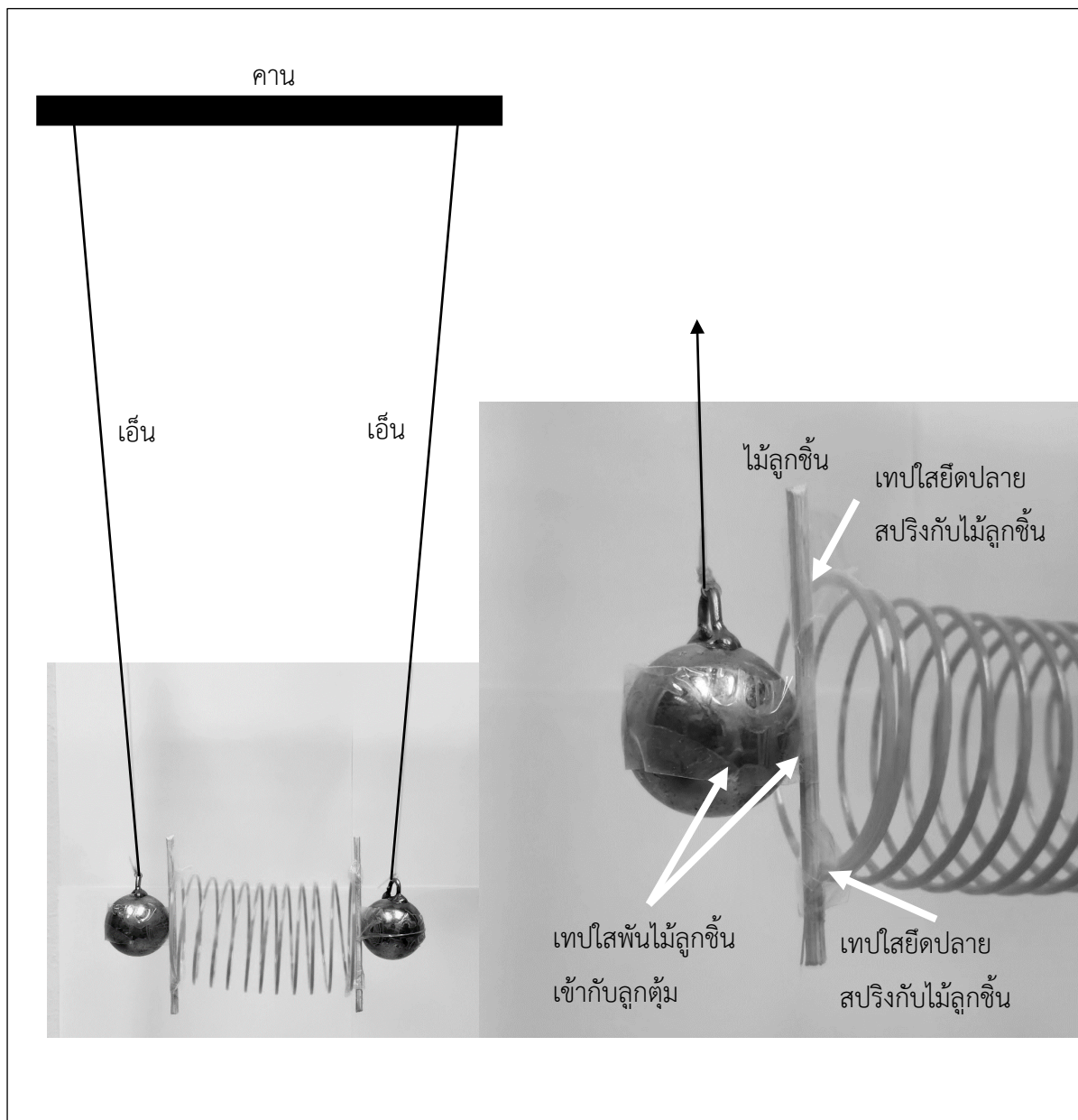
ทำการทดลองนี้เพื่อหาค่าของ g และ $\frac{2k}{M}$ โดยไม่ต้องวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน

ให้บันทึกค่าต่างๆ จากการวัดและคำตอบจากการคำนวณในกระดานสรุปคำตอบ

1. ใช้สปริงอันสั้นที่มี 12 ชุดสำหรับการทดลองนี้
2. โครงประกอบการทดลองในรูปที่ 5
 - 2.1 ใช้เทปใสพันลูกตุ้มเข้ากับไม้ ให้ห่างที่แขวนลูกตุ้มขนานกับความยาวของไม้
 - 2.2 ใช้เทปใสพันปลายสปริงข้างละ 1 ชุด เข้ากับไม้ลูกชิ้น ให้ไม้ทั้งคู่ขนานกัน (เหลือสปริงตรงกลางที่ยึดติดได้จำนวน 10 ชุด)
 - 2.3 ใช้เอ็นแขวนลูกตุ้มกับคาน ให้เอ็นยาวเท่ากัน ปรับความห่างของจุดที่แขวนให้ห่างกันเพื่อให้แต่ละชุดของสปริงห่างกันประมาณ 1 cm เพื่อให้ชุดไม่กระทบกันตอนแกว่ง (เอ็นที่แขวนจะเอียงเล็กน้อย)
3. ปรับความยาว ℓ ของเอ็นจำนวน 5 ค่า ในช่วง $15 < \ell < 40$ cm โดยที่แต่ละความยาวเอ็น ให้ทำการทดลองหาค่าต่อไปนี้ ในการหาค่า ให้จับเวลา 2 ซ้ำก็เพียงพอ*
 - 3.1 ให้ทำการสั่นแบบนอร์มัลโหมดที่ 2 ด้วยแอมพลิจูดน้อยๆ แล้วจับเวลาเพื่อหาค่าการแกว่งแบบเฟสตรงข้าม
 - 3.2 ให้ทำการสั่นแบบผสม โดยดึงลูกตุ้มหนึ่งออกไปด้วยแอมพลิจูด 1-2 cm ในขณะที่จับอีกลูกให้อยู่นิ่งตอนเริ่มต้น สังเกตการถ่ายเทพลังงาน แล้วจับเวลาเพื่อหาค่าการแกว่งจากหยุดนิ่งจนกระทั่งลูกตุ้มลูกเดิมกลับมาอยู่นิ่ง(แอมพลิจูดน้อยสุด)อีกครั้ง
4. นำผลการทดลองจากการแกว่งแบบเฟสตรงข้ามในข้อ 3.1 มาเขียนกราฟเส้นตรง แล้วหาค่า $\frac{2k}{M}$ และค่า g จากกราฟ ไม่ต้องหาค่าคลาดเคลื่อนจากกราฟ
5. นำผลการทดลองจากการแกว่งแบบผสมในข้อ 3.2 มาคำนวณหาค่า $\frac{2k}{M}$ แยกกันจำนวน 5 ค่าตามความยาวเชือก โดยใช้สมการที่ (4) $\frac{2\pi}{T_b} = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{M}} - \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ และใช้ค่า g จากข้อ 4. ข้างบน หลังจากนั้นหาค่าเฉลี่ยของ $\frac{2k}{M}$ ทั้ง 5 ค่านี้ (ข้อนี้ไม่ต้องเขียนกราฟ)

*หมายเหตุ: การทดลองปกติวัด 3 ซ้ำ แต่ครั้งนี้มีการวัดคาบจำนวนมากในเวลาจำกัด จึงอนุโลมให้วัดเพียง 2 ซ้ำ

รูปการทดลองตอนที่ 2



รูปที่ 5. ซ้าย: การแขวนลูกตุ้มควบคู่, ขวา: การใช้เทปใสยึดลูกตุ้มเข้ากับไม้และสปริง

ตอนที่ 3 มวลยังผลของสปริงในการสั่น (Effective Mass)

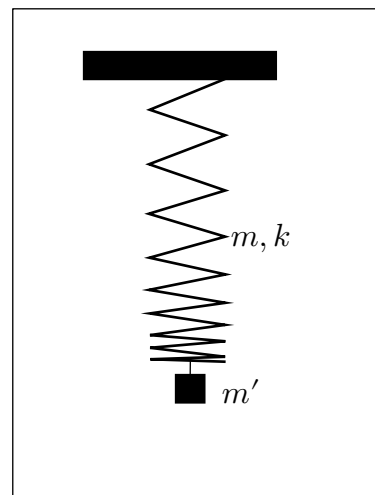
[5.2 คะแนน]

สำหรับสปริงที่แขวนในแนวดิ่งจากคานและทำให้เกิดการสั่นขึ้นลงในแนวดิ่ง ความถี่เชิงมุมของการสั่นขึ้นอยู่กับการสั่นของสปริง มวลยังผล (effective mass) และมวลที่ห้อยที่ปลายสปริง ตามสมการ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m' + \beta m}} \quad (5)$$

- m' คือมวลที่ห้อยที่ปลายด้านล่างของสปริง
- m และ k คือมวลและค่าคงตัวของสปริงส่วนที่สั่น
- β เป็นแฟกเตอร์ตัวเลข
- βm คือมวลยังผลของสปริง

(เสมือนมีมวล $m' + \beta m$ ห้อยจากสปริงที่ไม่มีมวล)



รูปที่ 6. การสั่นของสปริงในแนวดิ่ง

คำสั่ง

1. ออกแบบการทดลอง แล้วทำการทดลองเพื่อหาค่าของแฟกเตอร์ β ที่อัตราส่วนมวล $\frac{m'}{m} = 0$ และ $\frac{m'}{m} \approx 0.1, 0.5, 1, 2$ รวมทั้งหมด 5 ค่า โดยพยายามทำการทดลองให้ใกล้เคียงค่าอัตราส่วนมวลที่กำหนดนี้ให้มากที่สุด ไม่ต้องวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน
2. พล็อตค่าของ β ลงบนกระดาษกราฟ เทียบกับอัตราส่วนมวล $\frac{m'}{m}$ ทั้ง 5 ค่า แล้วลากเส้นแนวโน้มของแฟกเตอร์ β ที่อัตราส่วนมวลต่างๆ