

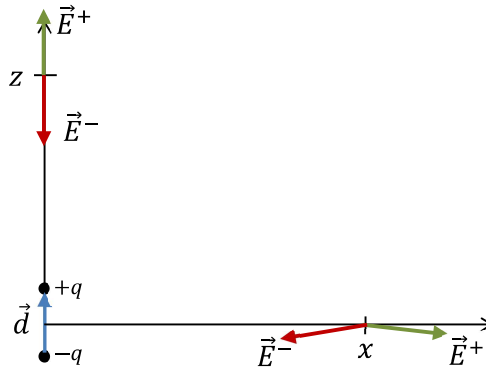
ข้อที่ 1. Electric Dipole & Point Charge

[8.0 คะแนน]

a) SOLUTION

เราสามารถนำศักย์ไฟฟ้าจากแต่ละประจุ
มาบวกกันได้โดยตรง แต่สำหรับ
สนามไฟฟ้าต้องคำนึงถึงทิศทางด้วย

ให้ $\vec{E}^+$ และ $\vec{E}^-$ เป็นสนามไฟฟ้าจาก
ประจุบวกและประจุลบตามลำดับ



ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนแกนนอนที่ตำแหน่ง x

ศักย์ไฟฟ้ารวมกันเป็น 0 เนื่องจากความสมมาตร

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \right) = 0$$

สนามแนวแกน x หักล้างกันเนื่องจากระยะจากประจุไปยังจุด x เท่ากัน

จึงเหลือเพียงสนามแนวแกน z

$$\vec{E}(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{x^2 + (d/2)^2} \right) \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \times 2\hat{z}$$

$$\vec{E}(x) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{x^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{4x^2} \right) \hat{z} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$$

ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนแกนตั้งที่ตำแหน่ง z

$$\text{ศักย์ไฟฟ้า } V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{z-d/2} - \frac{q}{z+d/2} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^2}$$

ไม่มีสนามในแนวแกน x

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2} \right) \vec{z} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd}{z^3} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3}$$



b) SOLUTION

แยกองค์ประกอบของโมเมนต์ไดโพล $p_r = p \cos \theta$ และ $p_\theta = p \sin \theta$

เลียนแบบข้อ a)

$$\text{สำหรับ } \vec{p}_r \text{ เหมือนสนามบนแกน } z \text{ เราได้ } V(p_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_r}{r^2} \text{ และ } \vec{E}(p_r) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \hat{r}$$

$$\text{สำหรับ } \vec{p}_\theta \text{ เหมือนสนามบนแกน } x \text{ เราได้ } V(p_\theta) = 0 \quad \text{และ} \quad \vec{E}(p_\theta) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$$

รวมศักย์ไฟฟ้า

$$V(r, \theta) = V(p_r) + V(p_\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

(หรือนักเรียนเริ่มต้นพิสูจน์ใหม่จากศักย์ไฟฟ้าของแต่ละประจุและใช้การประมาณที่เหมาะสม)

รวมสนามไฟฟ้า (โดยใช้ผลที่ได้จากข้อ a.)

$$\vec{E}(r, \theta) = \vec{E}(p_r) + \vec{E}(p_\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$$

$$(\text{หรือคิดจาก } \vec{E} = -\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta})$$

c) SOLUTION

ประจุ q_0 เคลื่อนที่เป็นวงกลมได้เมื่อมีแรงเฉพาะในระนาบการเคลื่อนที่เท่านั้น ไม่มีแรงในแนวตั้ง (แกน z)

จากสนามในข้อ b) นำมาหาองค์ประกอบของแรงในแนวแกน z เมื่อการเคลื่อนที่อยู่ที่มุม θ_c

$$E_z = E_r \cos \theta_c - E_\theta \sin \theta_c = 0 \quad (\text{ต้องไม่มีแรงในแกนนี้})$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta_c}{r^3} \cos \theta_c - \frac{p \sin \theta_c}{r^3} \sin \theta_c \right) = 0$$

$$2 \cos^2 \theta_c - \sin^2 \theta_c = 0$$

$$3 \cos^2 \theta_c - 1 = 0 \text{ หรือ } \theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 54.7^\circ, 125.3^\circ$$



เลือกคำตอบ 125.3° สำหรับประจุบวก q_0 จึงจะมีแรงในทิศทางที่ถูกต้อง โดยดูจากทิศของสนามไฟฟ้า หรือพิจารณาว่ามุมนี้ q_0 อยู่ใกล้ขั้วลบของไดโพลมากกว่า แรงไฟฟ้าจึงเป็นแรงดึงดูดและมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางวงกลม (หากเป็น 54.7° จะเป็นแรงผลักเนื่องจากใกล้ขั้วบวกของไดโพลมากกว่า - หรืออาจลอง sketch ทิศทางของสนามรอบ ๆ ไดโพล)

d) SOLUTION

แรงไฟฟ้าในแนวระนาบของวงกลมทำหน้าที่เป็นแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง

สนามไฟฟ้าในแนวระนาบของวงกลม $E_x = E_r \sin \theta_c + E_\theta \cos \theta_c$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta_c}{r^3} \sin \theta_c + \frac{p \sin \theta_c}{r^3} \cos \theta_c \right)$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \cos \theta_c \sin \theta_c}{r^3}$$

พิจารณาแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $q_0 E_x = -\frac{m_0 v^2}{R}$ เมื่อ v คืออัตราเร็วของการเคลื่อนที่ และ $R = r \sin \theta_c$ คือรัศมีของวงกลม

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \cos \theta_c \sin \theta_c}{r^3} q_0 = -\frac{m_0 v^2}{R}$$

$$\text{แทนค่า } \cos \theta_c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \theta_c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ได้ } m_0 v^2 R^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3\sqrt{3}} \sin^4 \theta_c \cos \theta_c p q_0 m_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3\sqrt{3}} p q_0$$

$$\text{หรือโมเมนตัมเชิงมุม } m_0 v R = L_z = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3\sqrt{3}} p q_0 m_0}$$



e) SOLUTION

$$\text{ทอร์กที่กระทำกับประจุคือ } \tau = q_0 E_\theta r \text{ ดังนั้น } \tau = \frac{dL}{dt} = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^2}$$

$$\text{แทนค่า } \frac{dL}{dt} = \dot{\theta} \frac{dL}{d\theta} \text{ จะได้ } \dot{\theta} \frac{dL}{d\theta} = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^2}$$

$$\text{คูณด้วย } m_0 r^2 \text{ จะได้ } m_0 r^2 \dot{\theta} \frac{dL}{d\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_0 q_0 p \sin \theta$$

$$\text{เขียน } m \dot{\theta} r^2 = L \text{ ดังนั้น } L \frac{dL}{d\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_0 p q_0 \sin \theta$$

$$\text{อินทิเกรต } \int L dL = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_0 p q_0 \int \sin \theta d\theta$$

$$\text{ได้ } \frac{1}{2} L^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_0 p q_0 \cos \theta + C \text{ และใช้เงื่อนไขเริ่มต้น } L = 0 \text{ ที่ } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ ได้ } C = 0$$

f) SOLUTION

$$\text{พลังงานกลรวม} = \frac{1}{2} m_0 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_0 r^2 \dot{\theta}^2 + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\text{แทนค่าโมเมนตัมเชิงมุม } L = m \dot{\theta} r^2$$

$$\text{ได้พลังงานรวม} = \frac{1}{2} m_0 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m_0 r^2} + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\text{ปล่อยประจุด้วยอัตราเร็วต้นเป็น 0 ที่ตำแหน่ง } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ดังนั้นพลังงานกลรวม} = 0$$

$$\frac{1}{2} m_0 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m_0 r^2} + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = 0$$

$$\text{นำ } \frac{1}{2} L^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_0 p q_0 \cos \theta \text{ จากข้อก่อนหน้า ไปแทนค่าในสมการพลังงาน}$$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{2} m_0 \dot{r}^2 = 0 \text{ หรือ } \dot{r} = 0$$

แสดงว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบปรีซ์มีคังตัว หรือเป็นส่วนโค้งของวงกลม

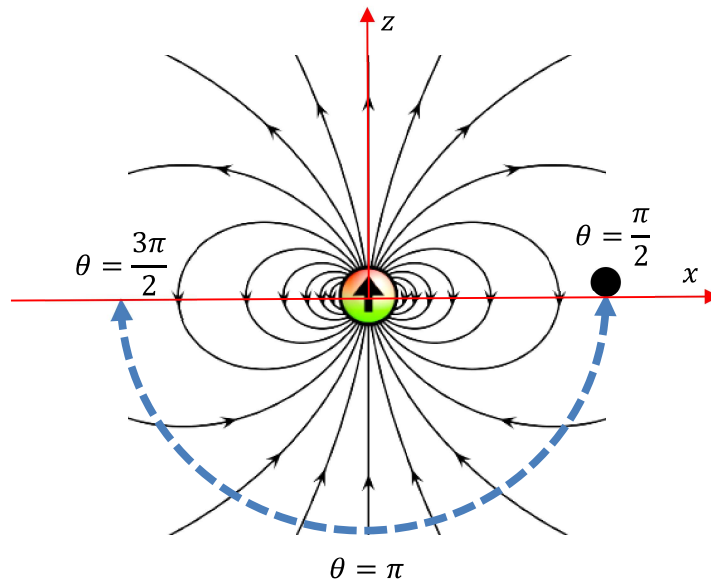
g) SOLUTION

จากสมการพลังงานหรือโมเมนตัมเชิงมุมในข้อ f. และการเคลื่อนที่ด้วยรัศมีคงตัว

$$\text{เราได้ } \frac{1}{2} m_0 r^2 \dot{\theta}^2 + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = 0$$

ประจุจะเคลื่อนที่ตามส่วนโค้งของวงกลมจาก $\theta = \frac{\pi}{2}$ จนมีอัตราเร็วสูงสุดที่ $\theta = \pi$

หลังจากนั้นทอร์ก $\tau = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^2}$ จะกลับทิศ ประจุเคลื่อนที่ช้าลงจนไปหยุดชั่วขณะอีกฝั่งหนึ่ง ก่อนจะเริ่มเคลื่อนที่ย้อนกลับ



อัตราเร็วสูงสุด ที่มุม $\theta = \pi$

$$\frac{1}{2} m_0 r^2 \dot{\theta}^2 + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r_0^2}$$

$$\text{แทนค่า } \theta = \pi \text{ จะได้ } v = \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{pq_0}{m_0 r_0^2}}$$



เวลาการเคลื่อนที่

เปลี่ยนมุมเริ่มต้นเป็น $\phi = \frac{\pi}{2} + \theta$ โดยสำหรับการเคลื่อนที่ $\frac{1}{4}$ ของรอบ $\phi = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\text{เราได้ } \frac{1}{2} m_0 r_0^2 \dot{\theta}^2 + q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r_0^2} = \frac{1}{2} m_0 r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{pq_0 \sin \phi}{r_0^2} = 0$$

$$\text{จัดรูปจนได้ } \dot{\phi} = \beta \sqrt{\sin \phi} \text{ เมื่อ } \beta = \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{pq_0}{m_0 r_0^4}}$$

ดังนั้นเวลาการเคลื่อนที่

$$T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\beta} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin \phi}} \approx \frac{4}{\beta} \left(2\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}}{30} \right) = \frac{10.3}{\beta} = 10.3 \sqrt{2\pi\epsilon_0 \frac{m_0 r_0^4}{pq_0}}$$

***** จบข้อ 1 *****



ข้อที่ 2 Magnetic cooling

[11.5 คะแนน]

a.) SOLUTION

สำหรับไดโพลโมเมนต์ที่ชี้ขึ้น $\uparrow$ และชี้ลง $\downarrow$ จะมีพลังงานต่ออนุภาคเป็น

$$E_{\uparrow} = -\mu B \quad \text{และ} \quad E_{\downarrow} = \mu B$$

ดังนั้นค่าพลังงานรวมของระบบคือ

$$U = -\mu B N_{\uparrow} + \mu B N_{\downarrow} = -\mu B (N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$$

b.) SOLUTION

จากที่โจทย์กำหนดว่า ไดโพลโมเมนต์ที่ชี้ขึ้น $\uparrow$ และชี้ลง $\downarrow$ จะมีค่าโมเมนต์แม่เหล็กต่ออนุภาคเป็น

$$\mu_{\uparrow} = \mu \hat{z} \quad \text{และ} \quad \mu_{\downarrow} = -\mu \hat{z}$$

ดังนั้นค่าสภาพแม่เหล็กของระบบคือ

$$\vec{M} = \mu N_{\uparrow} \hat{z} - \mu N_{\downarrow} \hat{z} = \mu (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) \hat{z}$$

$$M = \mu (N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$$

c.) SOLUTION

จากที่โจทย์กำหนดว่า $\frac{S}{k_B} = N \ln N - N_{\uparrow} \ln N_{\uparrow} - N_{\downarrow} \ln N_{\downarrow}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dS}{k_B} &= d(N \ln N) - d(N_{\uparrow} \ln N_{\uparrow}) - d(N_{\downarrow} \ln N_{\downarrow}) \\ &= 0 - \ln N_{\uparrow} dN_{\uparrow} - dN_{\uparrow} - \ln N_{\downarrow} dN_{\downarrow} - dN_{\downarrow} \end{aligned}$$

จาก $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ จะได้ว่า $0 = dN_{\uparrow} + dN_{\downarrow} \rightarrow dN_{\uparrow} = -dN_{\downarrow}$

นำไปแทนค่าสมการด้านบนจะได้

$$\frac{dS}{k_B} = \ln \frac{N_{\downarrow}}{N_{\uparrow}} dN_{\uparrow}$$

ดังนั้น $\frac{dS}{dN_{\uparrow}} = 0$ เมื่อ

$$N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = N/2$$

และค่าเอนโทรปีสูงสุดคือ

$$S_{\max} = N k_B \ln 2$$



d.) SOLUTION

สำหรับอนุภาคที่อยู่ในสถานะ $\uparrow$ และ $\downarrow$ จะมีพลังงานเป็น

$$E_{\uparrow} = -\mu B \quad \text{และ} \quad E_{\downarrow} = \mu B$$

เนื่องจากอนุภาคสามารถอยู่ได้เพียงแค่สถานะ $\uparrow$ และ $\downarrow$ เท่านั้น จะได้ว่า

$$1 = p_{\uparrow} + p_{\downarrow}$$

จากที่โจทย์กำหนดว่า $p_i \propto e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \rightarrow p_i = c e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$ โดยที่ c คือค่าคงที่การแปรผัน จะได้ว่า

$$1 = p_{\uparrow} + p_{\downarrow} = c e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + c e^{-\frac{\mu B}{k_B T}} \rightarrow c = \frac{1}{e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}}$$

ดังนั้นโอกาสที่อนุภาคจะอยู่ในสถานะ $\uparrow$ และ $\downarrow$ คือ

$$p_{\uparrow} = \frac{e^{\frac{\mu B}{k_B T}}}{e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}} = \frac{1}{e^{-\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1}$$

$$p_{\downarrow} = \frac{e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}}{e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}} = \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$N_{\uparrow} = p_{\uparrow} N = \frac{N}{e^{-\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1}$$

$$N_{\downarrow} = p_{\downarrow} N = \frac{N}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1}$$

e.) SOLUTION

จากที่โจทย์กำหนดว่า

$$\begin{aligned} \frac{S}{k_B} &= N \ln N - N_{\uparrow} \ln N_{\uparrow} - N_{\downarrow} \ln N_{\downarrow} \\ &= (N_{\uparrow} + N_{\downarrow}) \ln N - N_{\uparrow} \ln N_{\uparrow} - N_{\downarrow} \ln N_{\downarrow} \\ &= N_{\uparrow} \ln \frac{N}{N_{\uparrow}} + N_{\downarrow} \ln \frac{N}{N_{\downarrow}} \\ &= \frac{N}{e^{-\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) + \frac{N}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น



$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) + \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1)$$

เมื่อ $T \ll \mu B/k_B$ จะได้ว่า $e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} \rightarrow 0$ และ $e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} \rightarrow \infty$

และ

$$\begin{aligned} \frac{S}{Nk_B} &= \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) + \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) \\ &\approx \frac{1}{1} \ln(1) + \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}}} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}}) \\ &= \frac{2\mu B}{k_B T} e^{-\frac{2\mu B}{k_B T}} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{2\mu B}{k_B T} e^{-\frac{2\mu B}{k_B T}} \rightarrow 0$$

เพราะว่า $e^{-\frac{2\mu B}{k_B T}}$ เข้าใกล้ 0 เร็วกว่า T

เมื่อ $T \gg \mu B/k_B$ จะได้ว่า $e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} \rightarrow 1$ และ $e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \frac{S}{Nk_B} &= \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) + \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \ln(e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1) \\ &\approx \frac{1}{1+1} \ln(1+1) + \frac{1}{1+1} \ln(1+1) = \ln(2) \end{aligned}$$

f.) SOLUTION

จาก ข้อ b) และข้อ d) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M &= \mu(N_\uparrow - N_\downarrow) \\ &= \mu N \left(\frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} - \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} \right) \end{aligned}$$

สำหรับอุณหภูมิที่สูงเพียงพอ $T \gg \mu B/k_B$ จะได้ว่า

$$e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} \approx 1 - \frac{2\mu B}{k_B T} \quad \text{และ} \quad e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} \approx 1 + \frac{2\mu B}{k_B T}$$

แทนค่าลงใน M จะได้ว่า

$$M = \mu N \left(\frac{1}{2 - \frac{2\mu B}{k_B T}} - \frac{1}{2 + \frac{2\mu B}{k_B T}} \right)$$



$$\begin{aligned} &= \frac{\mu N}{2} \left[\left(1 + \frac{\mu B}{k_B T}\right) - \left(1 - \frac{\mu B}{k_B T}\right) \right] \\ &= \frac{\mu^2 N}{k_B T} B \end{aligned}$$

ดังนั้นค่า χ คือ

$$\chi = \frac{\mu^2 N}{k_B T}$$

g.) SOLUTION

ที่ $B = 0$ T, จำนวน $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$ ซึ่งทำให้ค่า

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{N_\uparrow}{N} \ln \frac{N}{N_\uparrow} + \frac{N_\downarrow}{N} \ln \frac{N}{N_\downarrow} = \ln(2) = 0.7$$

$$\frac{M}{N\mu} = \frac{N_\uparrow}{N} - \frac{N_\downarrow}{N} = 0$$

ที่ $B = 1$ T และ $T = 1$ K, จะได้ว่า $\frac{\mu B}{k_B T} = 0.67$ และจำนวน

$$\frac{N_\uparrow}{N} = \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} = 0.8$$

$$\frac{N_\downarrow}{N} = \frac{1}{e^{\frac{2\mu B}{k_B T}} + 1} = 0.2$$

ดังนั้น

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{N_\uparrow}{N} \ln \frac{N}{N_\uparrow} + \frac{N_\downarrow}{N} \ln \frac{N}{N_\downarrow} = -0.8 \ln(0.8) - 0.2 \ln(0.2) = 0.5$$

$$\frac{M}{N\mu} = \frac{N_\uparrow}{N} - \frac{N_\downarrow}{N} = 0.8 - 0.2 = 0.6$$

h.) SOLUTION

ในช่วงการลดความเข้มสนามแม่เหล็กแบบแอดิเอแบติกนั้น ค่าเอนโทรปีคงที่ จะได้ว่า

$$S_i = S_f$$

ให้ $x_i = \frac{\mu B_H}{k_B T_i}$ และ $x_f = \frac{\mu B_L}{k_B T_f}$ และจาก $S_i = S_f$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\frac{1}{e^{-2x_i} + 1} \ln(e^{-2x_i} + 1) + \frac{1}{e^{2x_i} + 1} \ln(e^{2x_i} + 1) \\ &= \frac{1}{e^{-2x_f} + 1} \ln(e^{-2x_f} + 1) + \frac{1}{e^{2x_f} + 1} \ln(e^{2x_f} + 1) \end{aligned}$$

$S_i = S_f$ จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_f$ ดังนั้นจะได้ว่า



$$\frac{\mu B_H}{k_B T_i} = \frac{\mu B_L}{k_B T_f} \rightarrow T_f = \frac{B_L}{B_H} T_i$$

i.) SOLUTION

เนื่องจากมี 2 อนุภาคที่อยู่ใกล้เคียง จะได้ว่า

$$B_L = 2 \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(9.274 \times 10^{-24})}{2\pi (10^{-9})^3} = 2 \text{ mT}$$

j.) SOLUTION

จากข้อ i. และ j. จะได้ว่า $T_f = \frac{B_L}{B_H} T_i = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ T}}{1 \text{ T}} (1 \text{ K}) = 2 \text{ mK}$

k.) SOLUTION

เนื่องจากช่วงที่ลดสนามแม่เหล็กจาก B_H เป็น B_L กระบวนการเป็นแบบแอดิแบติกทำให้วัสดุไม่มีการถ่ายเทความร้อน ดังนั้นความร้อนที่สูญเสียไปเกิดจากช่วงแรกที่มีการเพิ่มสนามแม่เหล็กโดยที่อุณหภูมิคงที่ที่ T_i

จาก $Q = T \Delta S$ จะได้ว่า $Q = T_i (S_1 - S_2)$

โดยที่

$$S_k = \frac{N k_B}{e^{-2x_k} + 1} \ln(e^{-2x_k} + 1) + \frac{N k_B}{e^{2x_k} + 1} \ln(e^{2x_k} + 1)$$

และ $x_1 = \frac{\mu B_L}{k_B T_i}$ และ $x_2 = \frac{\mu B_H}{k_B T_i}$

แทนค่า $T_i = 1 \text{ K}, B_L = 2 \text{ mT}, B_H = 1 \text{ T}$ จะได้ว่า

$$\frac{S_1}{N} = 9.6 \times 10^{-24} \approx 1 \times 10^{-23} \frac{J}{K} \text{ และ } \frac{S_2}{N} = 7 \times 10^{-24} \frac{J}{K}$$

และ

$$\frac{Q}{N} = 3 \times 10^{-24} \text{ J}$$

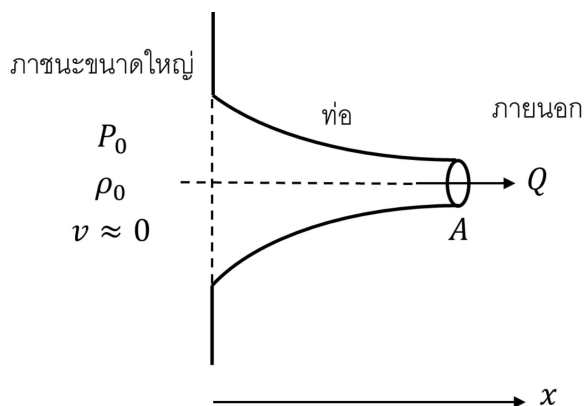
***** จบเฉลยข้อ 2 *****

เฉลยข้อที่ 3

[10.5 คะแนน]

a) อัตราการไหล $Q = \rho_0 A v_1$

b) ใช้หลักการของแบร์นูลลี



$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P_1}{\rho_0} + \frac{v_1^2}{2}$$

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P_1}{\rho_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\rho_0 A} \right)^2$$

$$P_0 = P_1 + \frac{Q^2}{2\rho_0 A^2}$$

$$P_1 = P_0 - \frac{Q^2}{2\rho_0 A^2}$$

c) พลังงานภายในต่อหนึ่งหน่วยมวลของแก๊สอุดมคติ

$$\varepsilon = \frac{c_v n T}{m}$$

$$= \frac{c_v}{R} \cdot \frac{P}{\rho}$$

$$= \frac{c_v}{c_p - c_v} \cdot \frac{P}{\rho}$$

$$= \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \frac{P}{\rho}$$

$$\left(nT = \frac{PV}{R}, \quad \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \right)$$

$$\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

d) จากสมการแบร์นูลลี

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varepsilon = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\frac{P}{\rho} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{constant}$$

เราสามารถใส่ $c^2 = \gamma P / \rho$ เพื่อเขียน

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \text{constant}$$

เมื่อใช้สมการนี้กับสถานการณ์ของโจทย์ เราจะได้

$$\frac{c_0^2}{\gamma-1} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{v_1^2}{2}$$

$$\frac{c_0^2}{\gamma-1} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{v_1^2}{c_1^2}\right)$$

$$c_0^2 = c_1^2 \left(1 + (\gamma-1) \frac{M^2}{2}\right) \quad \left(\frac{v_1}{c_1} = M\right)$$

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P_1}{\rho_1} \left(1 + (\gamma-1) \frac{M^2}{2}\right) \quad \left(c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}\right)$$

$$T_0 = T_1 \left(1 + (\gamma-1) \frac{M^2}{2}\right) \quad \left(\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{m_A}\right)$$

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + (\gamma-1)M^2/2}$$

e) จากการเปลี่ยนแปลงแบบแอดิแบติก

$$P \propto T^{\gamma/(\gamma-1)}$$

เราสามารถเขียน

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \left[\frac{1}{1 + (\gamma-1)M^2/2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$P_1 = P_0 \left[\frac{1}{1 + (\gamma-1)M^2/2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

f) จากหลักการของแบร์นูลลี

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{constant}$$

นำมาใช้กับสถานการณ์โจทย์ข้อนี้เพื่อหา v_1

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P_0}{\rho_0} &= \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} \\ v_1^2 &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) \\ v_1^2 &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{P_1}{P_0}\right)\end{aligned}$$

พิจารณาอัตราการไหลที่ปลายท่อด้านเปิด

$$\begin{aligned}Q^2 &= A^2 v_1^2 \rho_1^2 \\ &= A^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{P_1}{P_0}\right)\rho_1^2\end{aligned}$$

จากการเปลี่ยนแปลงแบบอะเดียแบติก เราจะได้สมการ $P/\rho^\gamma = \text{ค่าคงที่}$ หรือ

$$\frac{P_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \Rightarrow \rho_1 = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{1/\gamma} \rho_0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}Q^2 &= A^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{P_0}{\rho_0}\left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1/\gamma} \frac{P_1}{P_0}\right)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{2/\gamma} \rho_0^2 \\ &= A^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)P_0\rho_0\left(\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{1+1/\gamma}\right) \\ &= A^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)P_0\rho_0(\beta^{2/\gamma} - \beta^{1+1/\gamma})\end{aligned}$$

เราสามารถระบุ $f(\beta)$ ได้ดังนี้

$$Q^2 = P_0\rho_0 A^2 \underbrace{\frac{2\gamma}{\gamma-1}(\beta^{2/\gamma} - \beta^{1+1/\gamma})}_{f(\beta)}$$

g) พิจารณานูพันธ์เทียบกับ β

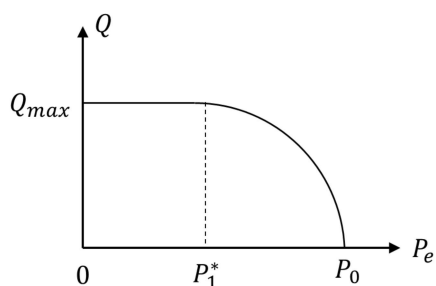
$$\frac{df}{d\beta} = 0 = \frac{d}{d\beta}(\beta^{2/\gamma} - \beta^{1+1/\gamma})$$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ P_1^* &= P_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\end{aligned}$$

เมื่อ $P_1 = P_1^*$ อัตราการไหลจะมีค่าสูงสุดเท่ากับ Q_{max} เมื่อแทน $P_1 = P_1^*$ ในคำตอบในข้อ e) เราจะได้ $M = 1$

- h) อัตราการไหลจะมากที่สุดเมื่อ $P_1 = P_1^*$ และปลายท่อด้านเปิดมีเลขมัคเท่ากับ 1 เมื่อลดความดันภายนอกให้น้อยกว่า P_1^* อัตราการไหลยังคงเป็น Q_{max}



***** จบข้อ 3 *****