



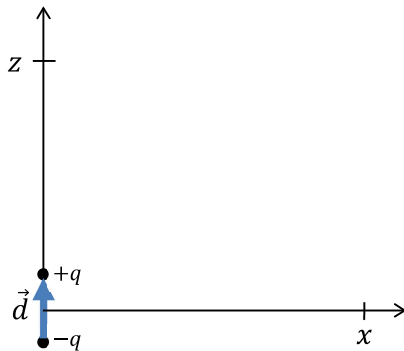
ข้อสอบและเฉลย ภาคทฤษฎี
การแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 21
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี
วันอาทิตย์ที่ 28 สิงหาคม พ.ศ. 2565

ข้อที่ 1. Electric Dipole & Point Charge

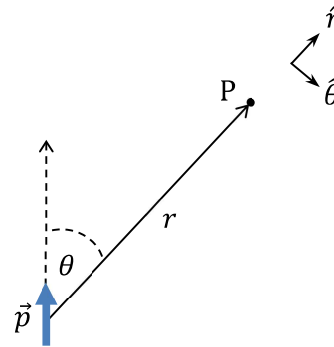
[8.0 คะแนน]

ไดโพลไฟฟ้า (electric dipole) ประกอบด้วยคู่ของประจุ $+q$ และประจุ $-q$ วางที่ตำแหน่งห่างกัน d ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ชี้จากประจุลบไปยังประจุบวก กำหนดให้โมเมนต์ไดโพลไฟฟ้า (electric dipole moment) $\vec{p} = q\vec{d}$

รูปที่ 1 แสดงไดโพลไฟฟ้าที่มีกึ่งกลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบ xz ของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และมีเวกเตอร์ $\vec{d}$ ชอนทับกับแกน z รูปที่ 2 แสดงไดโพลเดียวกันในระบบพิกัดโพลาร์ (polar coordinates) โดยมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$ ในทิศเดียวกับรัศมีที่พุ่งออกจากจุดกำเนิด และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{\theta}$ ในทิศตั้งฉากกับรัศมี



รูปที่ 1. ไดโพลไฟฟ้าในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน



รูปที่ 2. ไดโพลไฟฟ้าในระบบพิกัดโพลาร์

ในการตอบคำถามข้อ a) และ b) ให้ใช้การประมาณ $(1+x)^n \approx 1+nx$ เมื่อ $|x| \ll 1$ และ n เป็นจำนวนจริง

a) จากรูปที่ 1. จงหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า [1.3 คะแนน]

- บนแกนนอนที่ระยะ $x \gg d$ จากจุดกำเนิด
- บนแกนตั้งที่ระยะ $z \gg d$ จากจุดกำเนิด

โดยให้ตอบในเทอมของ p และ x หรือ z พร้อมค่าคงตัวที่เกี่ยวข้อง

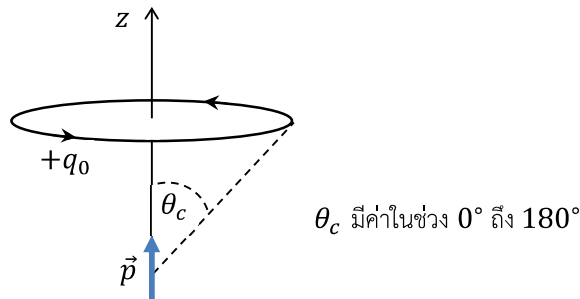
b) จากรูปที่ 2. เราอาจแยกโมเมนต์ไดโพลไฟฟ้าเป็นสององค์ประกอบที่ตั้งฉากกัน $\vec{p} = p_r \hat{r} + p_\theta \hat{\theta}$ (หรือใช้วิธีอื่น) จงแสดงว่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง (r, θ) ของจุด P เมื่อ $r \gg d$ เท่ากับ

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \text{ และ } \vec{E}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$

[0.9 คะแนน]



ตรึงไดโพลไฟฟ้าไว้ที่จุดกำเนิด หากปล่อยประจุบวก q_0 มวล m_0 ให้เคลื่อนที่ด้วยเงื่อนไขที่เหมาะสม มันจะสามารถเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกน z ของไดโพลไฟฟ้าได้ ให้พิจารณาการเคลื่อนที่เป็นวงกลมนี้อีกด้วย คำถามข้อ c) และ d) โดยไม่ต้องคำนึงถึงแรงโน้มถ่วง



รูปที่ 3. การเคลื่อนที่เป็นวงกลมของ q_0

c) จงหามุม θ_c ที่ทำให้สามารถเกิดการเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกน z ได้ ให้คำนวณมุมนี้เป็นตัวเลข

[1.2 คะแนน]

d) จงหาโมเมนตัมเชิงมุม L_z รอบแกน z ของการเคลื่อนที่นี้ ให้ตอบในรูปของ m_0, q_0, p และค่าคงตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

[1.1 คะแนน]

ในอีกกรณีหนึ่ง เราตรึงไดโพลไฟฟ้าไว้ที่จุดกำเนิดเช่นเดิม แต่เราปล่อยประจุบวก q_0 มวล m_0 จากหยุดนิ่งที่ตำแหน่ง $x = r_0$ บนแกน x

กำหนดให้ $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ และ $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ และให้ L เป็นขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมของประจุรอบจุดกำเนิด

e) เมื่อประจุเคลื่อนที่จากจุดที่ปล่อยถึงตำแหน่ง (r, θ) จงแสดงว่า $\frac{L^2}{2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_0 p q_0 \cos \theta$

นักเรียนอาจใช้ $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dL}{d\theta}$ และ $\int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + C$ [1.2 คะแนน]

f) จงเขียนพลังงานกลรวมของประจุในรูปของ $q_0, m_0, r, \dot{r}, \theta, p, L$ และค่าคงตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง แล้วจงพิสูจน์ว่า $\dot{r} = 0$ ซึ่งแสดงว่าประจุจะเคลื่อนที่ตามส่วนโค้งของวงกลมรอบจุดกำเนิด [1.0 คะแนน]



ข้อสอบภาคทฤษฎี ข้อที่ 1

การแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 21

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

วันที่ 28 สิงหาคม พ.ศ. 2565

หน้า 3/3

g) ปล่อยประจุจากหยุดนิ่งที่ระยะ $x = r_0$

- จงวาดเส้นทางการเคลื่อนที่ของประจุจากจุดที่ปล่อยจนกลับมาที่เดิมอีกครั้ง
- จงหาอัตราเร็วสูงสุดระหว่างการเคลื่อนที่และระบุตำแหน่งที่มีอัตราเร็วสูงสุด
- จงหาเวลาในการเคลื่อนที่กลับมาที่จุดปล่อยอีกครั้ง

นักเรียนอาจใช้ $\int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx \approx 2\sqrt{\phi} + \frac{\sqrt{\phi^5}}{30}$ เมื่อ $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ [1.3 คะแนน]

***** จบข้อ 1 *****



ข้อที่ 2 Magnetic cooling

[11.5 คะแนน]

ในการศึกษาปรากฏการณ์ทางควอนตัมของวัสดุนั้น มีความจำเป็นต้องลดอุณหภูมิไปที่อุณหภูมิต่ำมากๆ เพื่อที่จะลดผลกระทบจากพลังงานความร้อนจากสิ่งแวดล้อม วิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือการใช้ฮีเลียมเหลวซึ่งทำให้สามารถลดอุณหภูมิลงไปที่ 4.2 K และถ้าเราสูบฮีเลียมออกเพื่อลดความดัน อุณหภูมิจะสามารถลงไปได้ถึงประมาณ 1 K แต่ปรากฏการณ์บางชนิดเช่นการเป็นของไหลยิ่งยวดของฮีเลียมหรือการควบแน่นแบบโบส-ไอน์สไตน์ (Bose-Einstein condensation) จำเป็นต้องลงไปที่อุณหภูมิต่ำมากถึงช่วงมิลลิ, ไมโคร, หรือนาโนเคลวิน ในโจทย์ข้อนี้เราจะพิจารณาการใช้สนามแม่เหล็กในการลดอุณหภูมิของวัสดุชนิดพาราแมกเนติก (paramagnetic) ซึ่งเป็นวัสดุที่มีสภาพแม่เหล็กก็ต่อเมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอกมากระทำ

เพื่อความง่าย ในโจทย์ข้อนี้เราจะพิจารณาวัสดุชนิดพาราแมกเนติกที่ประกอบจากอนุภาคจำนวน N ตัว โดยที่อนุภาคแต่ละตัวประพฤติตัวเหมือนไดโพลโมเมนต์แม่เหล็ก (magnetic dipole moment) ที่ค่าไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กสามารถมีได้เพียงสองค่าคือชี้ขึ้น $\uparrow$ และชี้ลง $\downarrow$

$$\mu_{\uparrow} = \mu\hat{z} \text{ และ } \mu_{\downarrow} = -\mu\hat{z}$$

โดยที่ $\mu = 9.274 \times 10^{-24}$ J/T และพลังงานของแต่ละอนุภาคภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเป็น

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

กำหนดให้ $N_{\uparrow}$ และ $N_{\downarrow}$ คือจำนวนอนุภาคที่มีค่าไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กชี้ขึ้นและชี้ลงตามลำดับ

a) จงหาพลังงานรวมของระบบ U เนื่องจากสนามแม่เหล็กภายนอก $\vec{B} = B\hat{z}$ ในรูปของ $N_{\uparrow}$ และ $N_{\downarrow}$ และตัวแปรอื่นที่โจทย์กำหนด [0.5 คะแนน]

b) กำหนดให้สภาพแม่เหล็ก (magnetization) ของระบบ $\vec{M} = M\hat{z}$ คือผลรวมค่าไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กของอนุภาคทุกตัว จงหาค่า M ในรูปของ $N_{\uparrow}$ และ $N_{\downarrow}$ และตัวแปรอื่นที่โจทย์กำหนด [0.5 คะแนน]



จากความรู้ของฟิสิกส์เชิงสถิติ เอนโทรปีของระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{S}{k_B} = N \ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - N_\downarrow \ln N_\downarrow$$

โดยที่ $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K คือค่าคงตัวโบลต์ซมันน์

c) จงหาค่า $N_\uparrow$ และ $N_\downarrow$ ในรูปของ N ที่ทำให้ค่าเอนโทรปีมีค่าสูงสุด

และหาค่าเอนโทรปีสูงสุดนั้น

[2.0 คะแนน]

สมการที่อาจจะเป็นประโยชน์ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

ในการศึกษาจริงเราไม่สามารถนับจำนวน $N_\uparrow$ และ $N_\downarrow$ ได้เนื่องจากอนุภาคมีขนาดเล็กและมีจำนวนมหาศาล ดังนั้นเราจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง $N_\uparrow$ และ $N_\downarrow$ กับสนามแม่เหล็ก $\vec{B} = B\hat{z}$ และอุณหภูมิ T ซึ่งเป็นปริมาณที่เราสามารถควบคุมและวัดค่าได้แทน

จากหลักของการแจกแจงของโบลต์ซมันน์ที่กล่าวว่า ความน่าจะเป็น p_i ที่จะพบอนุภาคที่อยู่ในสภาวะ i (โมเมนต์แม่เหล็กชี้ขึ้น $\uparrow$ หรือชี้ลง $\downarrow$) นั้นแปรผันตามพลังงานของสภาวะ i ตามฟังก์ชัน

$$p_i = \frac{N_i}{N} \propto e^{-E_i/k_B T}$$

d) จงแสดงว่า $N_\uparrow = N/(\exp(-\frac{2\mu B}{k_B T}) + 1)$ และ $N_\downarrow = N/(\exp(\frac{2\mu B}{k_B T}) + 1)$

[1.8 คะแนน]

e) จงหาค่า $\frac{S}{Nk_B}$ ในรูปของ B, T, μ , และ k_B

จากนั้นจงหาค่า $\frac{S}{Nk_B}$ เมื่อ $T \ll \mu B/k_B$ และ เมื่อ $T \gg \mu B/k_B$

[1.7 คะแนน]

f) ที่อุณหภูมิสูงเพียงพอ ค่าของสภาพแม่เหล็กสามารถเขียนได้เป็น $M = \chi B$ จงหาค่า χ

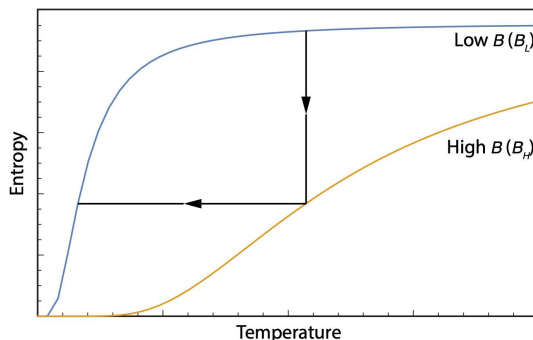
[1.0 คะแนน]

สมการที่อาจจะเป็นประโยชน์ $e^x \approx 1 + x$ และ $(1+x)^n \approx 1 + nx$ สำหรับ $x \ll 1$

g) ถ้าอุณหภูมิของระบบคือ 1 K จงหาค่า $\frac{S}{Nk_B}$ และ $\frac{M}{N\mu}$ เมื่อ $B = 0$ T

และ $B = 1$ T

[0.6 คะแนน]



ในการใช้สนามแม่เหล็กในการลดอุณหภูมิของวัสดุชนิดพาราแมกเนติกนั้น เริ่มต้นวัสดุจะอยู่ในสภาวะสมดุลทางความร้อนกับฮีเลียมเหลวทำให้อุณหภูมิคงที่ที่ T_i และสนามแม่เหล็กที่กระทำกับอนุภาคจะถูกเพิ่มขึ้นจาก B_L ไปยังความเข้ม B_H หลังจากนั้นตัววัสดุจะถูกแยกออกจากฮีเลียมเหลวและสนามแม่เหล็กจะถูกลดความเข้มลงแบบแอดิเอบติก (adiabatic) จนกระทั่งมีความเข้มเป็น B_L อีกครั้ง

h) จงหาอุณหภูมิสุดท้าย T_f ของวัสดุหลังจากสิ้นสุดกระบวนการการลดความเข้มของสนามแม่เหล็กแบบแอดิเอบติก [1.5 คะแนน]

ในวัสดุจริงนั้นถึงแม้ว่าเราจะลดสนามแม่เหล็กภายนอกไปเป็นศูนย์ อนุภาคในวัสดุก็จะมีรูปร่างสนามแม่เหล็กอยู่ซึ่งเป็นผลมาจากไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กของอนุภาคอื่นที่อยู่ข้างเคียง เราสามารถประมาณความเข้มของสนามแม่เหล็กที่เกิดจากไดโพลโมเมนต์แม่เหล็ก μ ได้จาก

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3}$$

โดยที่ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ (นิวตันต่อแอมแปร์กำลังสอง) และ r คือระยะทางวัดจากไดโพล

i) จงประมาณค่า B_L ถ้าให้ระยะห่างระหว่างอนุภาคคือ 1 nm และแต่ละอนุภาคจะมีอนุภาคที่อยู่ใกล้เคียงเป็นจำนวน 2 อนุภาคซึ่งมีทิศของไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กชี้ทิศเดียวกัน [0.4 คะแนน]

j) จงหาอุณหภูมิสุดท้ายของวัสดุ T_f ถ้าอุณหภูมิเริ่มต้น $T_i = 1 \text{ K}$ และสนามแม่เหล็ก $B_H = 1 \text{ T}$ [0.5 คะแนน]

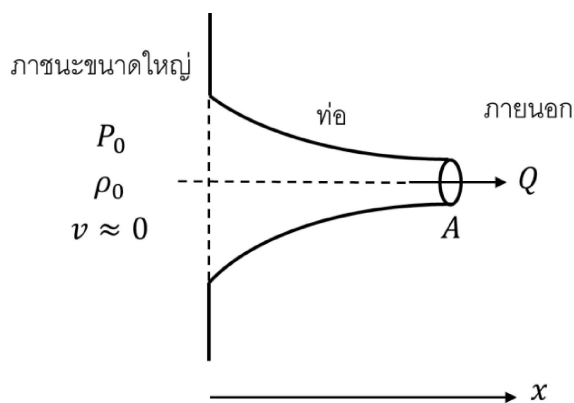
k) จงหาความร้อนต่อจำนวนอนุภาค Q/N ที่ถูกถ่ายเทออกมาจากวัสดุจากกระบวนการทั้งหมดที่เกิดขึ้น [1.0 คะแนน]

ข้อที่ 3 Sonic flow

[10.5 คะแนน]

ในการออกแบบท่อที่ใช้เป็นหัวฉีด เรามักจะให้พื้นที่หน้าตัดของท่อลดลงในทิศทางการไหลของของไหล เพื่อที่จะได้ความเร็วสูงสุดที่ปลายท่อด้านที่มีพื้นที่หน้าตัดเล็กที่สุด ภายใต้บางเงื่อนไข ความเร็วของของไหลสามารถมีค่าสูงถึงประมาณอัตราเร็วเสียงในของไหลนั้น โจทย์ข้อนี้ต้องการศึกษาการไหลของแก๊สในท่อที่ใช้เป็นหัวฉีดโดยคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นและอุณหภูมิของแก๊ส เพื่อหาอัตราการไหลสูงสุด

พิจารณาแก๊สที่ไหลออกมาจากภาชนะขนาดใหญ่ผ่านท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดไม่คงที่ตามความยาวของท่อ กำหนดให้ท่อวางตัวในแนวแกน x สมมติให้แก๊สไหลอย่างสม่ำเสมอทั่วหน้าตัด และมีความเร็วในทิศ $+x$ ดังนั้นพื้นที่หน้าตัดของท่อจะต้องเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ตามความยาว และปริมาณต่าง ๆ ของการไหลเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น รูปที่ 1 แสดงแก๊สไหลออกมาจากภาชนะขนาดใหญ่ผ่านท่อ กำหนดให้แก๊สในภาชนะมีความดันคงที่ P_0 และความหนาแน่นคงที่ ρ_0 ที่ปลายด้านเปิดของท่อมีพื้นที่หน้าตัด A ซึ่งเป็นหน้าตัดที่เล็กที่สุดของท่อ แก๊สมีอัตราการไหล (มวลต่อหนึ่งหน่วยเวลา) ที่ปลายท่อด้านเปิดเท่ากับ Q สมมติให้ภาชนะมีขนาดใหญ่มากจนเราสามารถประมาณให้ความเร็วของแก๊สในภาชนะเป็นศูนย์



รูปที่ 1 ภาชนะขนาดใหญ่ต่อกับท่อซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดไม่สม่ำเสมอ

เริ่มต้นเราสมมติให้ความหนาแน่นของแก๊สไม่เปลี่ยนแปลง และการไหลเป็นไปตามสมการของแบร์นูลลี

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = k$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่

a) กำหนดให้ v_1 เป็นความเร็วของแก๊สที่ปลายท่อด้านเปิด จงเขียนสมการอัตราการไหล (มวลต่อหนึ่งหน่วยเวลา) Q [1.0 คะแนน]

b) จงหาความดัน P_1 ของแก๊สที่ปลายท่อด้านเปิด (ตอบในรูปของ ρ_0 , P_0 , A และ Q) [1.0 คะแนน]

ต่อไปเราจะคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของแก๊สตามตำแหน่งภายในท่อ สมการของแบร์นูลลีจะต้องถูกดัดแปลงโดยคำนึงถึงพลังงานภายในของแก๊ส สมมติให้แก๊สประพฤติตัวเป็นแก๊สอุดมคติและการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นเป็นแบบแอดิแบติก (adiabatic) ดังนั้นสมการของแบร์นูลลีจะกลายเป็น

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varepsilon = k$$

โดยที่ ε คือพลังงานภายในต่อหนึ่งหน่วยมวลของแก๊ส

c) สำหรับแก๊สอุดมคติที่มีความดัน P และความหนาแน่น ρ จงแสดงว่า

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \frac{P}{\rho}$$

โดยที่ γ คืออัตราส่วนของความจุความร้อนของแก๊สอุดมคติ

[1.0 คะแนน]

เนื่องจาก P และ ρ เปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนแกน x อัตราเร็วเสียง $c = \sqrt{\gamma P / \rho}$ จะเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับตำแหน่งเช่นกัน กำหนดให้ M คือเลขมัคของแก๊สที่ออกมาจากท่อด้านเปิดซึ่งมีนิยามคือ $M = v_1 / c$

d) กำหนดให้แก๊สในภาชนะมีอุณหภูมิ T_0 จงหาอุณหภูมิ T_1 ของแก๊สที่ปลายท่อด้านเปิด (ตอบในรูปของ T_0 , M และ γ)

[1.5 คะแนน]

e) จงหาความดัน P_1 ของแก๊สที่ปลายท่อด้านเปิด (ตอบในรูปของ P_0 , M และ γ)

[1.0 คะแนน]

f) กำหนดให้ $P_1 / P_0 = \beta$ จงแสดงว่าอัตราการไหล $Q(\beta)$ เป็นไปตามสมการ

[2.0 คะแนน]

$$Q^2(\beta) = P_0 \rho_0 A^2 f(\beta)$$

พร้อมกับระบุฟังก์ชัน $f(\beta)$

g) พบว่าอัตราการไหลจะมีค่าสูงสุดเท่ากับ Q_{max} เมื่อ $P_1 = P_1^*$ ($P_1^* > 0$) จงหา P_1^* และเลขมัค M ขณะที่ $P_1 = P_1^*$ ที่ปลายท่อด้านเปิด

[1.0 คะแนน]

กำหนดให้ P_e เป็นความดันของสิ่งแวดล้อมภายนอก เราสามารถควบคุมอัตราการไหลได้โดยการปรับ P_e

h) จงเขียนกราฟระหว่าง Q ($0 \leq Q \leq Q_{max}$) และ P_e ($0 \leq P_e \leq P_0$)

[2.0 คะแนน]