



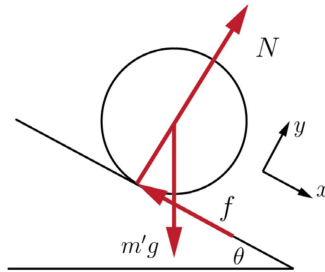
เฉลยข้อสอบภาคทฤษฎี

การแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 20
มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ (ออนไลน์)
วันอาทิตย์ที่ 5 ธันวาคม พ.ศ. 2564

ข้อที่ 1 ท่อกลิ้ง

[11 คะแนน]

a.) SOLUTION



จาก $\Sigma F = m'a$ จะได้ว่า

$$N = m'g \cos \theta \quad \text{และ} \quad m'g \sin \theta - f = m'a$$

จาก $\Sigma \tau = I \alpha$ รอบจุด CM จะได้ว่า

$$fR = I\alpha$$

จากกลิ้งโดยไม่ไถล จะได้ว่า $\alpha = a/R$ ดังนั้น $f = aI/R^2$ แทนค่าแรงเสียดทานลงในสมการแรกจะได้ว่า

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{m'R^2}} = \frac{g \sin \theta}{2}$$

b.) SOLUTION

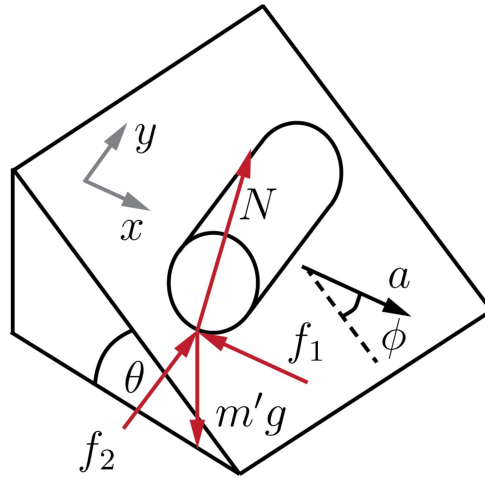
จาก 1.1.a ค่าแรงเสียดทานจะมีค่า $f = \frac{1}{2} m'g \sin \theta$ ซึ่งเป็นแรงเสียดทานสถิตเนื่องจากเป็นการกลิ้งโดยไม่ไถลทำให้ที่จุดสัมผัสระหว่างพื้นเอียงกับท่อไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน ดังนั้นสำหรับแรงเสียดทานสถิต

$$f \leq \mu N$$

$$\frac{1}{2} m'g \sin \theta \leq \mu m'g \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} \tan \theta \leq \mu$$

c.) SOLUTION



สำหรับการกลิ้งเฉื่อยนั้น ความเร่งและแรงเสียดทานที่ทำให้ท่อกำลังจะมีทิศเปลี่ยนไปจากข้อ 1.1.a เป็นตามรูป
 ด้านบน โดยที่แรงเสียดทาน f_1 และ f_2 อยู่ในระนาบพื้นเอียง แรง N ตั้งฉากกับระนาบพื้นเอียง
 ให้ แกน x และ y อยู่ในระนาบพื้นเอียงดังรูป

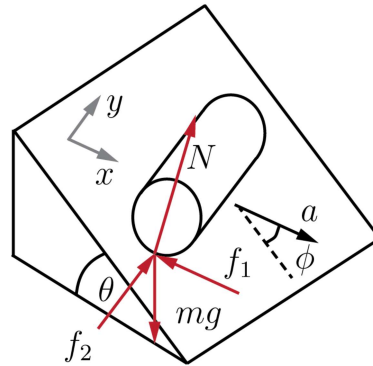
พิจารณาแรงในแนวความเร่งจะได้ว่า $m'g \sin \theta \cos \phi - f_1 = m'a$

จาก $\Sigma \tau = I \alpha$ รอบจุด CM จะได้ว่า $f_1 R = I \alpha$

จากเงื่อนไขกลิ้งโดยไม่ไถล จะได้ว่า $\alpha = a/R$ ดังนั้น $f_1 = aI/R^2$ แทนค่าแรงเสียดทานลงในสมการแรกจะได้

$$a = \frac{g \sin \theta \cos \phi}{1 + \frac{I}{m'R^2}} = \frac{g \sin \theta \cos \phi}{2}$$

d.) SOLUTION



จาก $\Sigma \tau = I \alpha$ รอบจุด CM จะได้ว่า $f_1 R = I \alpha = \frac{I a}{R} \rightarrow f_1 = \frac{I a}{R^2} = \frac{m' R^2 (g \sin \theta \cos \phi)}{2 R^2} = \frac{m' g}{2} \sin \theta \cos \phi$

เนื่องจาก วัตถุไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน y จะได้ว่า $f_2 = m' g \sin \theta \sin \phi$

ดังนั้นแรงเสียดทานรวมที่กระทำต่อห่อคือ

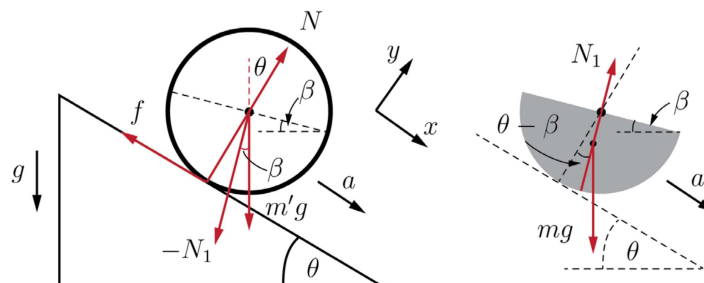
$$f = (f_1^2 + f_2^2)^{1/2} = \frac{m' g}{2} \sin \theta (\cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi)^{1/2} = \frac{m' g}{2} \sin \theta (1 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2}$$

ดังนั้นสำหรับแรงเสียดทานสถิต

$$\begin{aligned}
 f &\leq \mu N \\
 \frac{m' g}{2} \sin \theta (1 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2} &\leq \mu (m' g \cos \theta) \\
 \frac{1}{2} (\tan \theta) (1 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2} &\leq \mu
 \end{aligned}$$

e.) SOLUTION

วิธีที่ 1 ใช้กฎของนิวตัน



free body diagrams ของทรงกระบอกกลางและครึ่งทรงกระบอกเป็นดังรูปด้านบน โดยที่ N คือแรงปฏิกิริยาที่พื้นเอียงทำกับทรงกระบอกกลาง และ $\vec{N}_1$ คือแรงปฏิกิริยาที่ทรงกระบอกกลางทำกับครึ่งทรงกระบอก สำหรับทิศของ $\vec{N}_1$ นั้นต้องชี้ผ่านจุดศูนย์กลางเพราะเป็นแรงในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัสระหว่างวัตถุทั้งสอง นอกจากนั้นแรง $\vec{N}_1$ จะต้องชี้ผ่านจุด cm ของครึ่งทรงกระบอกด้วยเพราะว่าครึ่งทรงกระบอกไม่

มีการหมุน ทำให้ทอร์ควรรอบจุด cm $\sum \tau = \tau_{N_1} + \tau_{mg} = 0$ เนื่องจาก $\tau_{mg} = 0$ จะทำให้ได้ว่า $\tau_{N_1} = 0$ ซึ่งเป็นได้แค่กรณีเดียวคือแรง $\vec{N}_1$ ชี้ไปยังจุด cm (เวลาคิดทอร์กต้องคิดรอบจุด cm เท่านั้น เพราะว่าเครื่องทรงกระบอกมีความเร่ง)

จาก free body diagram ของทรงกระบอกกลาง จะได้สมการต่อไปนี้ ($|\vec{N}_1| = N_1$)

$$m'g \sin \theta + N_1 \sin(\theta - \beta) - f = m'a$$

$$N - N_1 \cos(\theta - \beta) = m'g \cos \theta$$

$$fR = I_{ring} \alpha = m'R^2 \left(\frac{a}{R} \right)$$

จาก free body diagram ของเครื่องทรงกระบอก จะได้สมการต่อไปนี้

$$mg \sin \theta - N_1 \sin(\theta - \beta) = ma$$

$$N_1 \cos(\theta - \beta) = mg \cos \theta$$

แก้ 5 สมการด้านบนเพื่อหาค่า a และ β จะได้

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{m' + m}{\left(\frac{I_{ring}}{m'R^2} + 1 \right) m' + m} \right] g \sin \theta \\ &= \left(\frac{m' + m}{2m' + m} \right) g \sin \theta \end{aligned}$$

และ

$$\beta = \theta - \tan^{-1} \left[\left(\frac{m'}{2m' + m} \right) \tan \theta \right]$$

วิธีที่ 2 ใช้อนุรักษ์พลังงานหาความเร่ง

สมมติว่าเริ่มต้นจากหยุดนิ่ง พลังงานตอนเริ่มต้นจะมีเพียงพลังงานศักย์ โดยกำหนดให้เป็น 0 ตอนเริ่มต้นเมื่อระบบกลิ้งลงจะมีพลังงานจลน์ของท่อ (c) และเครื่องทรงกระบอก (s) เป็น

$$E_c = \frac{1}{2} I_{c,cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m' v_{cm}^2 = \frac{1}{2} (m'R^2) \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m' v_{cm}^2 = m' v_{cm}^2$$

$$E_s = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \quad (\text{เครื่องทรงกระบอกมีแต่ translation ไม่มี rotation})$$

จากอนุรักษ์พลังงานจะได้ว่า

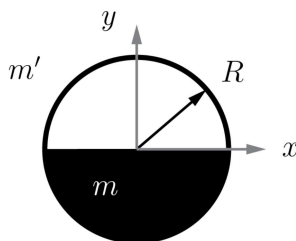
$$0 = m' v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 - (m' + m) gl \sin \theta$$

$$v_{cm}^2 = 2 \left[\left(\frac{m' + m}{2m' + m} \right) g \sin \theta \right] l$$

เนื่องจากระบบมีความเร่งคงที่จะได้ว่า $v_{cm}^2 = 2al$ ดังนั้น

$$a = \left(\frac{m' + m}{2m' + m} \right) g \sin \theta$$

f.) SOLUTION



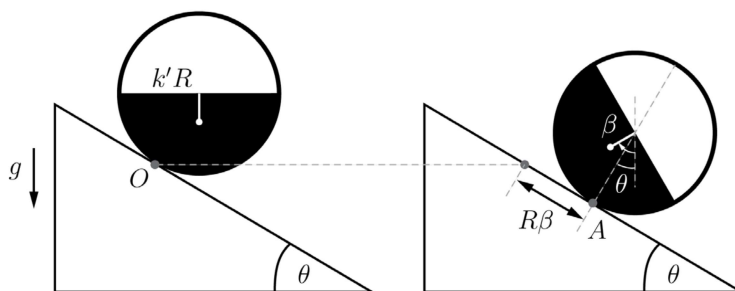
จุด CM ของท่อนทรงกระบอกกลวงนั้นอยู่ที่ตำแหน่ง $y_{m'} = 0$ ส่วนจุด CM ของครึ่งทรงกระบอกอยู่ที่ตำแหน่ง $y_{cm} = kR$ ดังนั้นจุด CM ของระบบท่อนและครึ่งทรงกระบอกคือ

$$R_{cm} = \frac{mkR}{m + m'} \equiv k'R$$

ดังนั้น

$$k' = \frac{m}{m + m'} k$$

g.) SOLUTION



อันดับแรก พิจารณาความสูงของจุด CM ของระบบท่อนและครึ่งทรงกระบอกหลังจากกลิ้งไปเป็นมุม β โดยกำหนดให้จุด O เป็นตำแหน่ง $y = 0$ จะได้ว่าตอนเริ่มต้นความสูงของจุด CM ในแนวแกน y คือ

$$y_{cm}(\beta = 0) = R \cos \theta - k'R$$

และเมื่อกลิ้งไปเป็นมุม β ตำแหน่ง $y_{cm}(\beta)$ มีค่าเป็น

$$y_{cm}(\beta) = R \cos \theta - k' R \cos \beta - R \beta \sin \theta$$

จากกฎทรงพลังงานจะได้ว่า

$$Mgy_{cm}(0) = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{sys} \omega^2 + Mgy_{cm}(\beta)$$

เนื่องจากการกลิ้งโดยไม่ไถล จุด A มีความเร็วเป็น 0 จะได้ความสัมพันธ์

$$\vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$$

$$v_{cm} = f(\theta, \beta) \omega$$

โดยที่ $\vec{r}$ คือการกระจัดจากจุด CM ไปยังจุด A และ $f(\theta, \beta)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน นำค่าไปแทนสมการ

ด้านบนจะได้

$$Mgy_{cm}(0) - Mgy_{cm}(\beta) = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{sys} \omega^2 = \frac{1}{2} (M f^2 + I_{sys}) \omega^2 \geq 0$$

ดังนั้นระบบจะกลิ้งลงพื้นเอียงได้ก็ต่อเมื่อ

$$y_{cm}(0) - y_{cm}(\beta) = R \beta \sin \theta - k' R (1 - \cos \beta) \geq 0$$

$$\sin \theta \geq k' \frac{(1 - \cos \beta)}{\beta}$$

เราต้องการให้ค่า $\sin \theta$ มีค่ามากกว่าค่าทางฝั่งขวามือสำหรับทุกๆ β

ดังนั้นต้องหาค่า β ที่ให้ค่าสูงสุดของ $g(\beta) = (1 - \cos \beta)/\beta$ ซึ่งหาได้จาก $g'(\beta) = 0$ จะได้ว่า

$$g'(\beta) = \frac{\beta \sin \beta - (1 - \cos \beta)}{\beta^2} = 0$$

$$\beta = \frac{(1 - \cos \beta)}{\sin \beta} = \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \tan \frac{\beta}{2}$$

ดังนั้นค่า $\beta = \theta_0$ จากที่กำหนดให้ในโจทย์ (numerical solution คือ $\theta_0 = 2.33 \text{ rad} = 133.5 \text{ องศา}$)

ดังนั้นจะได้ว่า

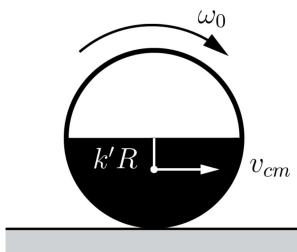
$$\sin \theta \geq k' \frac{(1 - \cos \theta_0)}{\theta_0} = k' \frac{2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}{2 \tan \frac{\theta_0}{2}} = k' (2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2}) = k' \sin \theta_0$$

มุมที่น้อยที่สุดของพื้นเอียงที่จะทำให้ระบบทอกลิ้งลงพื้นเอียงได้คือ

$$\theta_{min} = \sin^{-1} \left[k' \frac{(1 - \cos \theta_0)}{\theta_0} \right] = \sin^{-1} (k' \sin \theta_0)$$

(หรือแทนค่าจะได้ $\theta_{min} = \sin^{-1} (k' \sin 133.5^\circ) = \sin^{-1} (k' \sin 46.5^\circ)$)

h.) SOLUTION



วิธีที่ 1 คิดเป็นวัตถุชิ้นเดียว

พลังงานจลน์ของระบบคือ

$$E_k = \frac{1}{2}(m + m')v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_0^2$$

จากการกลิ้งโดยไม่ไถล ความเร็วที่จุดสัมผัสมีค่าเป็น 0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 v_{cm} &= \omega_0(R - k'R) \\
 &= (1 - k')\omega_0 R
 \end{aligned}$$

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบรอบจุด cm หาได้จากทฤษฎีแกนขนานระหว่างจุดศูนย์กลาง o และจุด cm

$$\begin{aligned}
 I_{cm} &= I_o - (m + m')(k'R)^2 \\
 &= m'R^2 + \frac{1}{2}mR^2 - (m + m')k'^2 R^2
 \end{aligned}$$

แทนค่าปริมาณต่างๆลงใน E_k จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 E_k &= \left[(1 - k')m' + \left(\frac{3}{4} - k' \right) m \right] R^2 \omega_0^2 \\
 &= \left[m' + \left(\frac{3}{4} - k \right) m \right] R^2 \omega_0^2
 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 คิดแยกระหว่างท่อและครึ่งทรงกระบอก

พลังงานจลน์ของท่อ (c) ได้จาก

$$E_{k,c} = \frac{1}{2}m'v_{cm,c}^2 + \frac{1}{2}I_{cm,c}\omega_0^2$$

โดยที่ $v_{cm,c} = \omega_0 R$ และ $I_{cm,c} = m'R^2$ แทนค่าจะได้

$$E_{k,c} = m'R^2 \omega_0^2$$

ส่วนพลังงานจลน์ของครึ่งทรงกระบอก (s) ได้จาก

$$E_{k,s} = \frac{1}{2}mv_{cm,s}^2 + \frac{1}{2}I_{cm,s}\omega_0^2$$

โดยที่ $v_{cm,s} = \omega_0(R - kR) = \omega_0(1 - k)R$ และ $I_{cm,s} = \frac{1}{2}mR^2 - mk^2 R^2$ จากทฤษฎีแกนขนาน

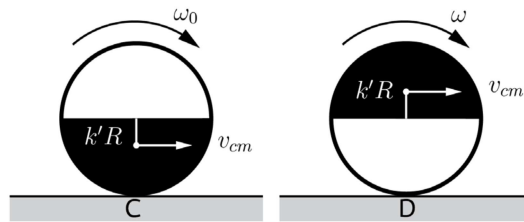
แทนค่าจะได้

$$E_{k,s} = \left(\frac{3}{4} - k\right) m R^2 \omega_0^2$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบคือ

$$\begin{aligned}
 E_k &= E_{k,c} + E_{k,s} \\
 &= \left[(1 - k')m' + \left(\frac{3}{4} - k'\right)m\right] R^2 \omega_0^2 \\
 &= \left[m' + \left(\frac{3}{4} - k\right)m\right] R^2 \omega_0^2
 \end{aligned}$$

i.) SOLUTION



เนื่องจากการกลิ้งโดยไม่ไถล ระบบจะอนุรักษ์พลังงาน จะได้ว่าพลังงานรวมตอนรูป C มีค่าเท่ากับ พลังงานตอนรูป D

สำหรับตอน C: $v_{cm} = \omega_0(R - k'R) = (1 - k')\omega_0 R$

พลังงานจลน์ตอน C คือ $E_{k,C} = \left[(1 - k')m' + \left(\frac{3}{4} - k'\right)m\right] R^2 \omega_0^2 = \left[m' + \left(\frac{3}{4} - k\right)m\right] R^2 \omega_0^2$

พลังงานศักย์ตอน C คือ $E_{p,C} = (m + m')g(R - k'R) = (m + m')(1 - k')gR$

สำหรับตอน D: $v_{cm} = \omega(R + k'R) = (1 + k')\omega R$

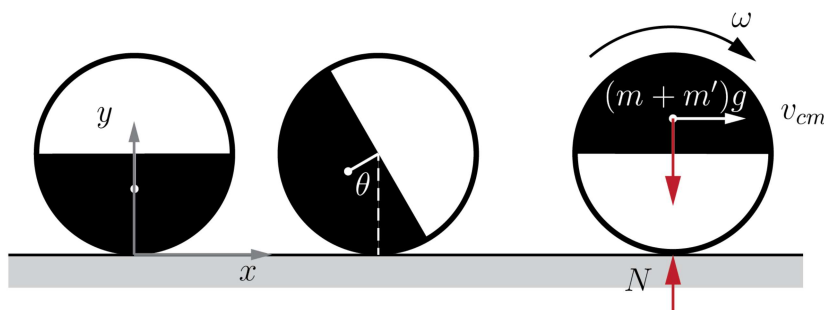
พลังงานจลน์ตอน D คือ $E_{k,D} = \left[(1 + k')m' + \left(\frac{3}{4} + k'\right)m\right] R^2 \omega^2 = \left[m' + \left(\frac{3}{4} + k\right)m\right] R^2 \omega^2$

พลังงานศักย์ตอน D คือ $E_{p,D} = (m + m')g(R + k'R) = (m + m')(1 + k')gR$

จากอนุรักษ์พลังงาน ได้ว่า $E_{k,C} + E_{p,C} = E_{k,D} + E_{p,D}$

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= \frac{\left[(1 - k')m' + \left(\frac{3}{4} - k'\right)m\right] R^2 \omega_0^2 - (m + m')g(2k'R)}{\left[(1 + k')m' + \left(\frac{3}{4} + k'\right)m\right] R^2} \\
 &= \frac{\left[m' + \left(\frac{3}{4} - k\right)m\right] R^2 \omega_0^2 - (m + m')g(2k'R)}{\left[m' + \left(\frac{3}{4} + k\right)m\right] R^2}
 \end{aligned}$$

j.) SOLUTION



จากกฎของนิวตัน จะได้ว่า

$$N - (m + m')g = (m + m') a_{cm}^y$$

โดยที่ความเร่งของจุด cm ในแนวแกน y สามารถหาได้จาก

$$y_{cm} = R - k'R \cos \theta$$

$$v_{cm}^y = \frac{dy_{cm}}{dt} = k'R \sin \theta \omega$$

$$a_{cm}^y = \frac{dv_{cm}^y}{dt} = k'R \cos \theta \omega^2 + k'R \sin \theta \frac{d\omega}{dt}$$

เมื่อ $\theta = \pi$,

$$a_{cm}^y = -k'R\omega^2 = -\frac{k'}{(1 + k')^2} \frac{v_{cm}^2}{R}$$

ดังนั้น N มีค่าเป็น

$$N = (m + m')(g - k'R\omega^2)$$

***** จบเฉลยข้อ 1 *****

ข้อที่ 2 Thermionic Vacuum Tubes

[7 คะแนน]

a.) SOLUTION

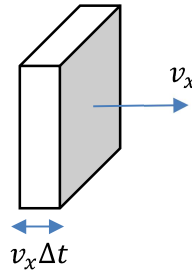
เนื่องจากเป็นอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียวที่เคลื่อนที่ เราจึงยังคงประมาณได้ว่าสนามระหว่างแผ่นคู่ขนานมีความสม่ำเสมอ ดังนั้นที่ตำแหน่ง x จึงมีความต่างศักย์ $V(x) = (x/d)V_d$

อิเล็กตรอนมีความเร็วตามสมการการอนุรักษ์พลังงาน $\frac{1}{2}mv_x^2 - eV(x) = \frac{1}{2}mv_0^2$

หรือ

$$v_x = \sqrt{\frac{2exV_d}{md} + v_0^2}$$

b.) SOLUTION



อิเล็กตรอนที่ตำแหน่ง x จะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $v_x \Delta t$ ในระยะเวลา Δt จึงมีประจุเคลื่อนที่ผ่านพื้นที่หน้าตัด a^2 เท่ากับ $\Delta Q = \rho_x (v_x \Delta t) a^2$ (ความหนาแน่น คูณ ปริมาตร) ดังนั้นกระแส

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_x v_x a^2$$

c.) SOLUTION

ความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้า $E_x = -\frac{dV_x}{dx}$

จาก $\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho_x}{\epsilon_0}$ ดังนั้น $\frac{d^2V_x}{dx^2} = -\frac{\rho_x}{\epsilon_0}$

เรามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 3 ตัวคือ V_x , ρ_x และ v_x จึงต้องใช้ 3 สมการ

จากข้อก่อนหน้า $I = \rho_x v_x a^2$ (1)

โจทย์กำหนดให้ $\frac{d^2V_x}{dx^2} = -\frac{\rho_x}{\epsilon_0}$ (2)

การอนุรักษ์พลังงาน $eV_x = \frac{1}{2}mv_x^2$ (3)

แทนค่า ρ_x จากสมการ (1) เข้าไปในสมการ (2) ซึ่งอิเล็กตรอนเป็นประจุลบ จึงต้องสลับเครื่องหมายด้านขวามือของสมการเป็นค่าบวก

$$\frac{d^2V_x}{dx^2} = \frac{I}{\epsilon_0 v_x a^2} \quad (4)$$

แทนค่า v_x จากสมการ (3) เข้าไปในสมการ (4) จะได้ว่า

$$\frac{d^2V_x}{dx^2} = \frac{I}{\epsilon_0 a^2} \sqrt{\frac{m}{2eV_x}}$$

ดังนั้น

$$\alpha = \frac{I}{\epsilon_0 a^2} \sqrt{\frac{m}{2e}}$$

d.) SOLUTION

แทนค่า $V_x = kx^n$ ใน $\frac{d^2V_x}{dx^2} = \frac{I}{\epsilon_0 a^2} \sqrt{\frac{m}{2eV_x}}$

จะได้

$$kn(n-1)x^{n-2} = \frac{I}{\epsilon_0 a^2} \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{k}}$$

ซึ่งจะเท่ากันทุกค่าของ x เมื่อ $n-2 = -\frac{n}{2}$ หรือ $n = \frac{4}{3}$

และได้ค่า $k = \left(\frac{81}{32} \frac{mI^2}{\epsilon_0^2 a^4 e}\right)^{1/3}$

หรือ

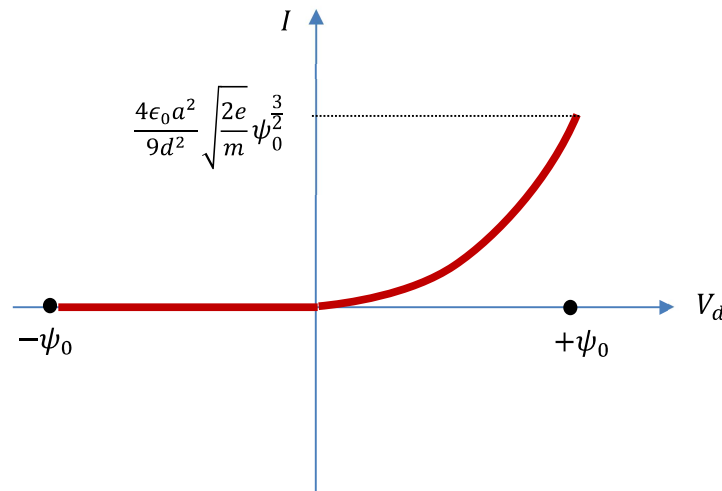
แก้สมการโดยการอินทิเกรตตรง ๆ แล้วใช้เงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม

e.) SOLUTION

เมื่อกลับขั้วความต่างศักย์ จะไม่มีกระแสไหล เนื่องจากขั้วที่ร้อนเป็นขั้วแอโนด อิเล็กตรอนที่หลุดออกมา จะโดนดูดกลับไป

จาก $V_x = (81ml^2/32\epsilon_0^2 a^4 e)^{1/3} x^{4/3}$ จะได้ว่า $V_d = (81ml^2/32\epsilon_0^2 a^4 e)^{1/3} d^{4/3}$ หรือ $I \propto (V_d)^{3/2}$

ที่ตำแหน่ง $V_d = +\psi_0$ จะได้ $I = \frac{4\epsilon_0 a^2}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \psi_0^{\frac{3}{2}}$



f.) SOLUTION

จาก $\rho_x = -\epsilon_0 d^2 V_x / dx^2 = -\epsilon_0 k n(n-1) x^{n-2}$ ประจุอิเล็กตรอนทั้งหมดระหว่างแผ่นคือ

$$Q = \int_{x=0}^{x=d} \rho_x a^2 dx = -\epsilon_0 k a^2 n d^{n-1} = -\frac{4}{3} \epsilon_0 a^2 k d^{1/3}$$

ที่แอโนด $V_d = k d^{\frac{4}{3}}$ นำผลนี้ไปแทนค่า k จะได้

$$Q = -\frac{4 \epsilon_0 a^2 V_d}{3 d}$$

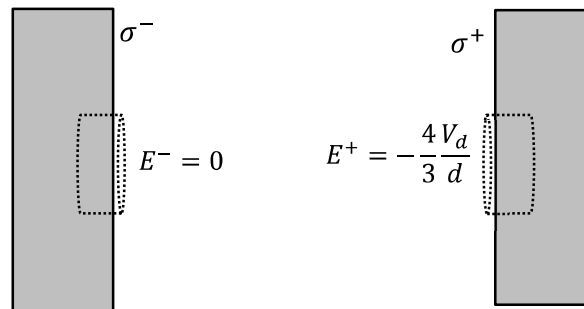
g.) SOLUTION

สนามไฟฟ้าที่ระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ $E_x = -dV_x/dx = -knx^{n-1}$

ที่แผ่นขั้วลบ เมื่อแทนค่า $x = 0$ จะได้ $E_0^- = 0$

ที่แผ่นขั้วบวก เมื่อแทนค่า $x = d$ จะได้ $E_d^+ = -knd^{n-1} = -\frac{4}{3}\frac{V_d}{d}$ ทิศไปทางซ้ายมือ

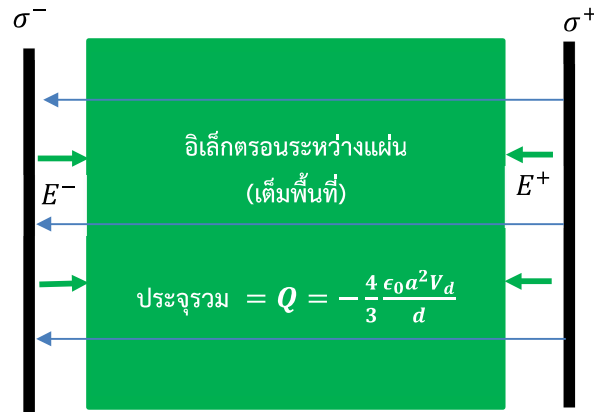
แบบที่ 1 ใช้ผิวของเกลส์



ที่บริเวณแคโทด (วาดแบบแผ่นโลหะหนา ๆ) เราสร้างผิวของเกลส์โดยปลายด้านหนึ่งอยู่ในเนื้อโลหะของแคโทด อีกด้านหนึ่งอยู่ที่ผิวขวาของแคโทดพอดี ซึ่งมี $E_0^- = 0$ บริเวณนั้น เนื่องจากสนามภายในเนื้อโลหะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น $\sigma^- = 0$

ที่บริเวณแอโนด (วาดแบบแผ่นโลหะหนา ๆ) เราสร้างผิวของเกลส์โดยปลายด้านหนึ่งอยู่ในเนื้อโลหะของแอโนด อีกด้านหนึ่งอยู่ที่ผิวขวาของแอโนดพอดี ซึ่งมี $E_d^+ = -\frac{4}{3}\frac{V_d}{d}$ บริเวณนั้น เนื่องจากสนามภายในเนื้อโลหะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น $\sigma^+ = \epsilon_0 E_d^+ = -\frac{4}{3}\frac{\epsilon_0 V_d}{d}$

แบบที่ 2 การรวมสนามจากประจุแบบแผ่น



เขียนสมการสนามรวมที่บริเวณหัวแคโทดและหัวแอโนด และประจุรวมแล้วแก้สมการ

$$\text{ติดกับแผ่นแคโทด } E_0^- = \frac{\sigma^-}{2\epsilon_0} - \frac{Q}{2\epsilon_0 a^2} - \frac{\sigma^+}{2\epsilon_0} = 0$$

$$\text{ติดกับแผ่นแอโนด } E_d^+ = \frac{\sigma^-}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{2\epsilon_0 a^2} - \frac{\sigma^+}{2\epsilon_0} = -\frac{4}{3} \frac{V_d}{d}$$

$$\text{ประจุรวม } a^2 \sigma^- + Q + a^2 \sigma^+ = 0$$

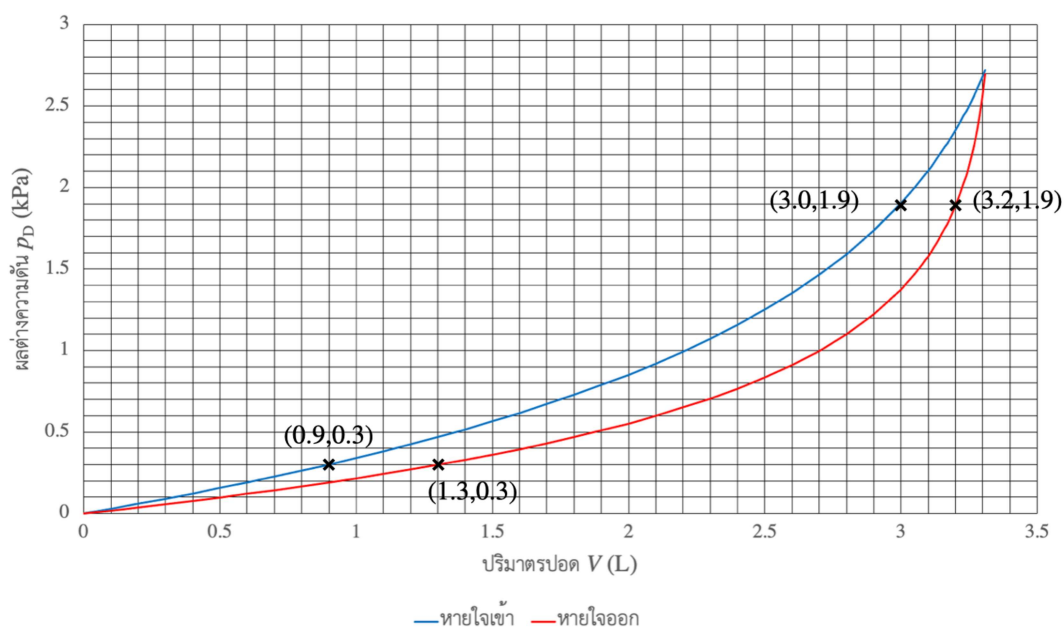
$$\text{แล้วแก้สมการได้ } \sigma^- = 0 \text{ และ } \sigma^+ = \frac{4}{3} \frac{\epsilon_0 V_d}{d}$$

ข้อที่ 3

[12 คะแนน]

เฉลยข้อที่ 3.1

[6 คะแนน]



a) เลือกจุดคู่อันดับบนกราฟในช่วงหายใจเข้าและหายใจออกอย่างละ 1 จุดแล้วทำการแทนค่าในสมการ

$$\alpha = \frac{V}{1 - e^{-kp_D}}$$

จะได้ค่า

	ขณะหายใจเข้า	ขณะหายใจออก
α (L)	$\alpha_I = 3.57$	$\alpha_O = 3.35$

b) พิจารณาเนื้อเยื่อปอดทรงกลมรัศมี R ที่อยู่ในสมดุล (รูปครึ่งทรงกลม) ที่มีความดันภายในเนื้อเยื่อปอดเท่ากับ p_0 และความดันภายนอกเท่ากับ $p_0 - p_D$

$$p_0(\pi R^2) = (p_0 - p_D)(\pi R^2) + 2\gamma\pi R$$

$$p_D = \frac{2\gamma}{r}$$

งานที่ทำในการขยายเนื้อเยื่อปอด w มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} dw &= \gamma dS \\ &= \frac{p_D r}{2} dS \end{aligned}$$

แทนค่า dS ด้วย $dS = 8\pi r dr$ งานที่แก๊สทำจะมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} dw &= \frac{p_D r}{2} 8\pi r dr \\ &= p_D (4\pi r^2 dr) \\ &= p_D dV \end{aligned}$$

เมื่อ $dV = 4\pi r^2 dr$

หมายเหตุ หากใช้ $2 \times \gamma \times 2\pi R$ ค่า $dS = 2 \times 8\pi r dr$

c) ทำการย้ายข้างเพื่อจัดรูปสมการ $p_D = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - V}\right)$ ให้อยู่ในรูป $V = \alpha(1 - e^{-kp_D})$ แล้วทำการหา dV จะได้ $dV = \alpha k e^{-kp_D} dp_D$ แทนค่าใน $w = \int p_D dV$

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{p_f} p_D \alpha k e^{-kp_D} dp_D \\ &= \frac{\alpha}{k} \int_0^{p_f} (-kp_D) e^{(-kp_D)} d(-kp_D) \\ &= \frac{\alpha}{k} (1 - e^{-kp_f} - kp_f e^{-kp_f}) \\ &= \frac{V_f}{k} - \alpha p_f + V_f p_f \end{aligned}$$

หลังจากนั้นหาค่าของ p_f โดยแทนค่า $V_f = 3.31$ L ในสมการ $p_D = \frac{1}{k_I} \ln\left(\frac{\alpha_I}{\alpha_I - V_f}\right)$ จะได้ $p_D = 2700$ Pa

แทนค่า $k_I = 0.964 \times 10^{-3} \text{ Pa}^{-1}$ และ $\alpha_I = 3.58 \times 10^{-3} \text{ m}^{-3}$ จะได้งานที่ทำบนเนื้อเยื่อปอดเท่ากับ $w_I = 2.7 \text{ J}$

d) ทำการแปลงหน่วย

$$\begin{aligned} \text{งานที่เนื้อเยื่อปอดได้รับ} &= \frac{2.7 \times 10 \times 24 \times 60}{4.2 \times 1000} \\ &= 9.26 \text{ kcal per day} \end{aligned}$$

ดังนั้นงานที่กล้ามเนื้อกะบังลมทำในการหดตัวเท่ากับ

$$\begin{aligned} \text{งานที่กล้ามเนื้อกะบังลมทำ} &= \frac{9.26}{0.3} \\ &= 30.9 \text{ kcal per day} \end{aligned}$$

e) งานที่กล้ามเนื้อกระบังลมกระทำคิดเป็น $\frac{30.9}{1600} \times 100 = 1.9\% \approx 2\%$ ข้อสังเกต ร่างกายใช้พลังงานจากกระบวนการเมตาบอลิซึมกับการควบคุมกล้ามเนื้อกระบังลมน้อยมาก!

f) เมื่อกล้ามเนื้อกระบังลมหดตัวความดันในช่องโพรงอกจะมีค่าลดลง อากาศภายนอกจะไหลเข้าสู่ปอด ในช่วงนี้ อากาศที่ไหลเข้าปอดได้รับความร้อนจากร่างกายทำให้พลังงานภายในของอากาศเพิ่มขึ้นและอากาศเกิดการขยายตัวทำงาน พลังงานภายในของอากาศภายในปอดจะเพิ่มขึ้นเพื่อรักษาระดับความดันไม่ให้ลดลงตามความดันในช่องอก

$$\begin{aligned} \text{พลังงานภายในของอากาศในปอดที่เพิ่มขึ้น} &= \frac{5}{2}p_0V_f - \frac{5}{2}(p_0 - p_D)V_f \\ &= \frac{5}{2}p_DV_f \\ &= \frac{5}{2} \times 2668 \times 3.31 \times 10^{-3} = 22.1 \text{ J} \end{aligned}$$

g) ใช้กฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ $Q = \Delta U + W$

แทนค่า $\Delta U = 22.1 \text{ J}$ และ $w_I = 2.7 \text{ J}$ จะได้ $Q = 24.8 \text{ J}$

h) จากสมการ $w = \frac{V_f}{k} - Ap_f + V_f p_f$ เราจะสามารถหางานในช่วงหายใจออกได้เท่ากับ $w_O = -1.94 \text{ J}$

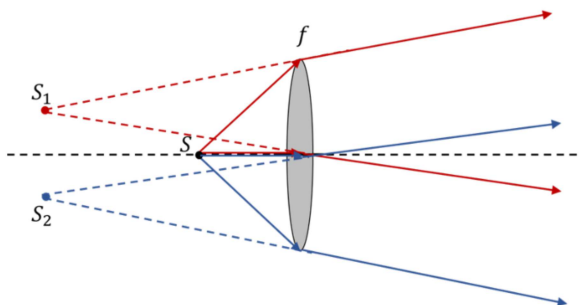
ดังนั้นงานทั้งหมดที่เนื้อเยื่อปอดได้รับมีค่าเท่ากับ $w_{\text{net}} = 2.70 - 1.94 = 0.76 \text{ J}$

ดังนั้นอัตราส่วน $\frac{\text{ความร้อนที่ถ่ายเทให้กับอากาศ}}{\text{งานที่ทำให้กับเนื้อเยื่อปอด}} = \frac{24.8}{0.76} = 32.6$

เฉลยข้อที่ 3.2

[6 คะแนน]

a) สามารถเขียนเส้นทางเดินของแสงได้ดังนี้



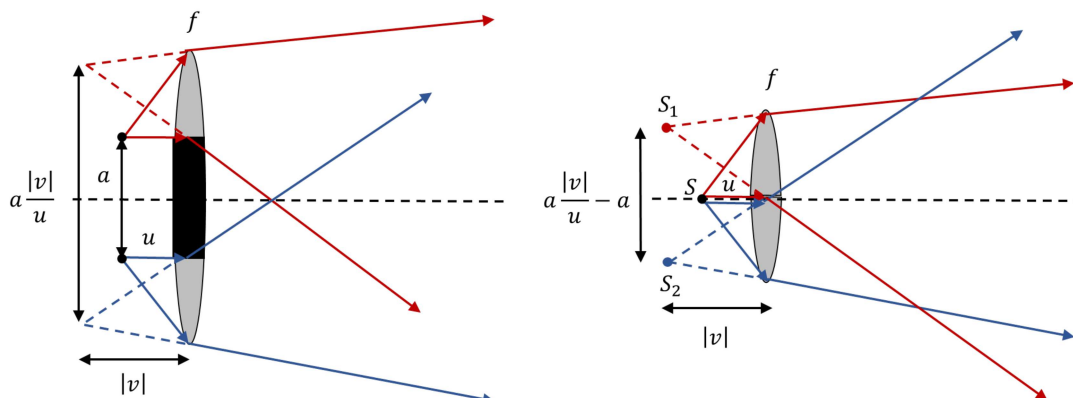
b) ใช้สมการเลนส์บางเพื่อหาระยะภาพ

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f} &= \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \\
 \frac{1}{v} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{u} \\
 v &= \frac{fu}{u-f} \quad (u < f)
 \end{aligned}$$

เราจะได้อนุกรมของระยะภาพ

$$|v| = \frac{fu}{f-u}$$

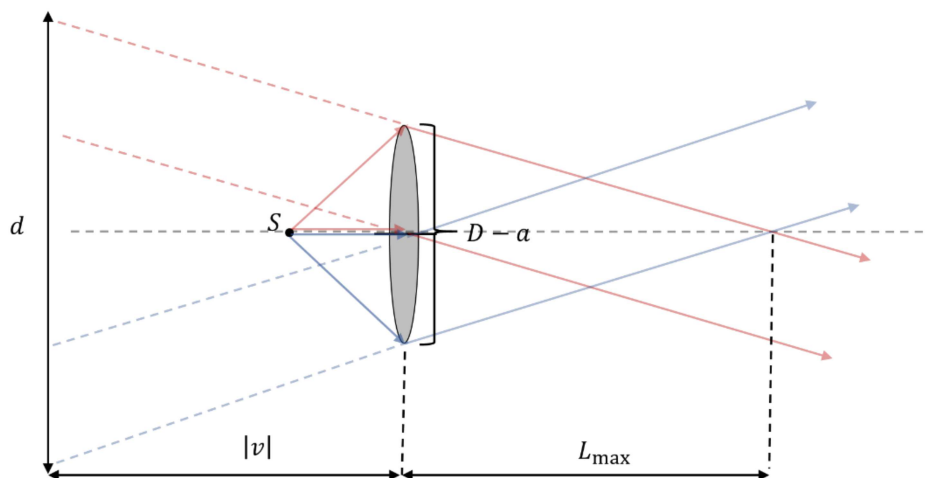
c) ทหาระยะห่างระหว่าง S_1 และ S_2



ภาพเสมือน S_1 และ S_2 อยู่ห่างกัน

$$\begin{aligned}
 d &= a \frac{|v|}{u} - a \\
 &= a \left(\frac{|v|}{u} - 1 \right) \\
 &= a \left(\frac{f}{f-u} - 1 \right), \quad (|v| = \frac{uf}{f-u}) \\
 &= \frac{au}{f-u}
 \end{aligned}$$

d) เมื่อ $u = f$ รังสีหักเหเป็นรังสีขนาน ระยะภาพ $|v| = fu/(f-u) \rightarrow \infty$ ภาพ S_1 และ S_2 อยู่ห่างกัน $d = au/(f-u) \rightarrow \infty$



พิจารณาสามเหลี่ยมคล้าย

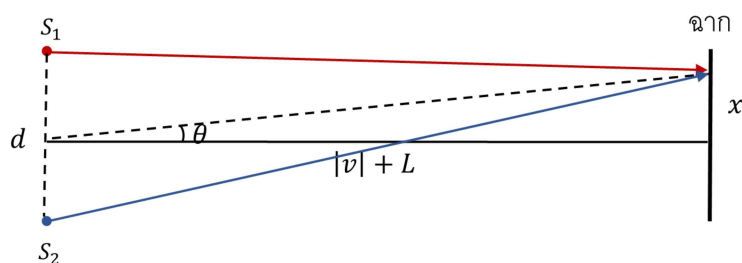
$$\frac{D - a}{L_{\max}} = \frac{d}{|v| + L_{\max}}$$

$$\frac{D - a}{L_{\max}} = \frac{d}{|v|} \quad (|v| \gg L_{\max})$$

$$\frac{D - a}{L_{\max}} = \frac{a}{f} \quad \left(|v| = \frac{fu}{f - u}, \quad d = \frac{au}{f - u} \right)$$

$$L_{\max} = \frac{f}{a}(D - a)$$

e) แหล่งกำเนิดแสงเสมือน S_1 และ S_2 ห่างกันเป็นระยะทาง d ทำให้เกิดริ้วการแทรกสอดบนฉากที่อยู่ห่างออกไป $L + |v|$ เราสามารถหาระยะห่างระหว่างริ้ว Δx จากเงื่อนไขการแทรกสอดแบบเสริมกัน



เราสามารถหาระยะห่างระหว่างริ้ว Δx จากเงื่อนไขการแทรกสอดแบบเสริมกัน

$$d \sin \theta = n\lambda$$

$$d \frac{x}{|v| + L} = n\lambda$$

$$d \frac{\Delta x}{|v| + L} = \Delta n \cdot \lambda$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{d}(|v| + L) \quad (\Delta n = 1)$$

$$= \lambda \left(\frac{|v|}{d} \right) \quad (|v| \gg L)$$

$$= \frac{\lambda f}{a} \quad \left(|v| = \frac{fu}{f - u}, \quad d = \frac{au}{f - u} \right)$$

สังเกตว่า Δx ไม่ขึ้นอยู่กับ L ($L \leq L_{\max}$)



เฉลยข้อสอบภาคทฤษฎี ข้อที่ 3

การแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 20
มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ (ออนไลน์)

วันที่ 5 ธันวาคม พ.ศ. 2564

หน้า 7/7

f) วางฉากที่ระยะ $L = L_{\max}/2$ ซึ่งเป็นตำแหน่งที่แสงซ้อนทับกันเป็นบริเวณพื้นที่มากที่สุด บริเวณนี้มีความสูง $W = (D - a)/2$ จำนวนริ้วการแทรกสอดบนฉากคือ

$$\begin{aligned} N &= \frac{W}{\Delta x} \\ &= \frac{(D - a)/2}{\lambda f/a} \\ &= \frac{(D - a)a}{2\lambda f} \end{aligned}$$

***** จบเฉลยข้อ 3 *****