



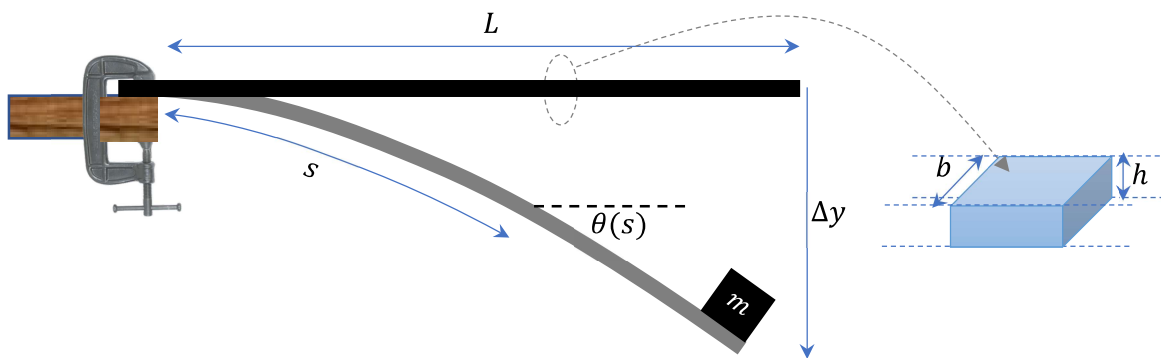
ข้อสอบภาคปฏิบัติ

การแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 20
มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ (ออนไลน์)
วันเสาร์ที่ 4 ธันวาคม พ.ศ. 2564

คานยื่น (Cantilever Beam)

[20 คะแนน]

คานยื่น (Cantilever Beam) คือ คานที่มีส่วนปลายคานด้านหนึ่งยื่นจากฐานรองรับ ซึ่งเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระไม่มีโครงสร้างรองรับ ดังแสดงในรูปที่ 1 ตัวอย่างคานยื่นในชีวิตประจำวัน เช่น คานรับพื้นระเบียง คานกันสาด หรือสะพานยื่นที่มีฐานรองรับหลักอยู่ที่คอสะพาน โดยไม่ต้องมีเสาข้างอยู่กลางแม่น้ำ ทั้งนี้ระยะยื่นและน้ำหนักที่รองรับได้จะสัมพันธ์กับรูปร่างและความแข็งแรงของวัสดุที่ใช้ทำคานยื่น ซึ่งจะต้องมีการออกแบบให้เหมาะสมตามการใช้งาน



รูปที่ 1. โครงสร้างของคานยื่นและการโค้งงอ คานมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงด้านขวาของรูป

คานยื่นจะมีการโค้งงอเล็กน้อยเนื่องจากน้ำหนักของตัวเองและจะโค้งงอมากขึ้นเมื่อมีมวลมาแขวนที่ปลาย เมื่อพิจารณาความโค้งของคานที่ตำแหน่งต่าง ๆ และโมเมนต์ของแรง เราพบว่า

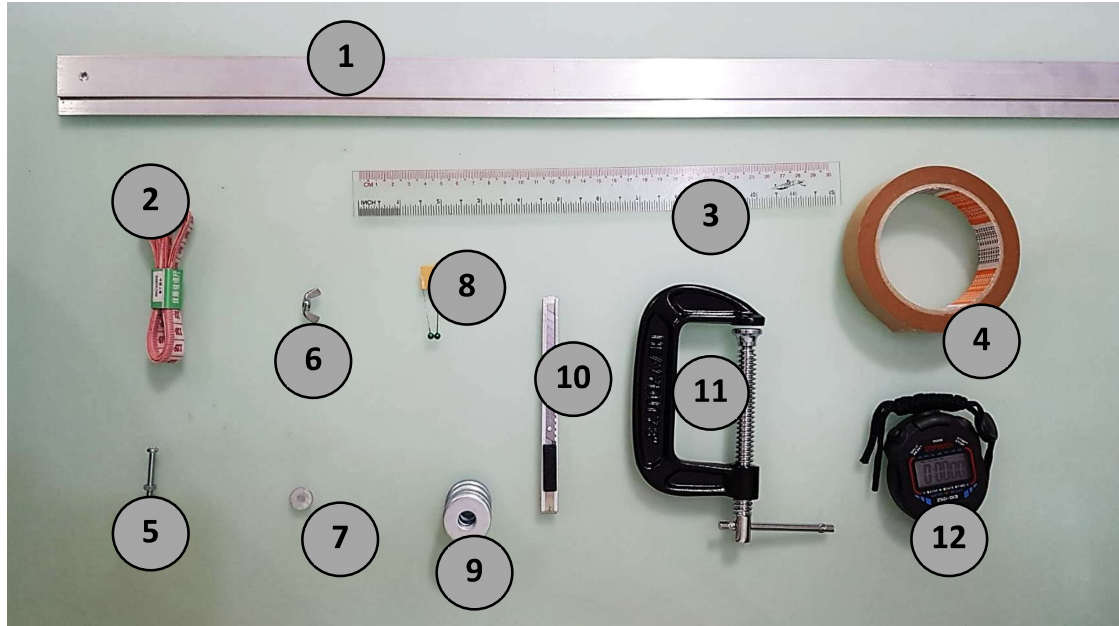
$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{1}{EI} [\mu(L-s)g + mg] \cos \theta \quad (1)$$

- s เป็นระยะตามแนวคานวัดจากจุดยึด
- $\theta(s)$ เป็นมุมที่คานที่ตำแหน่ง s ทำกับแนวระดับ
- L เป็นความยาวของคานส่วนที่ยื่นออกมา

- μ เป็นมวลต่อหน่วยความยาวของคาน
- E เป็นค่า Young's Modulus ของวัสดุที่ใช้ทำคาน
- $I = \frac{1}{12}bh^3$ (หน่วย เมตร⁴) เป็นโมเมนต์ของพื้นที่หน้าตัด เมื่อ b เป็นความกว้างและ h เป็นความหนาของคาน
- m เป็นมวลที่ปลายคาน
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ เป็นความโน้มถ่วงที่ผิวโลก

สมการที่ 1 เป็นสมการไม่เชิงเส้น (non-linear) ซึ่งโดยทั่วไปหาคำตอบได้ยาก โดยคร่าวๆ ค่า EI แสดงถึงความแข็งแรงของคาน คานที่มีค่า EI มากกว่าจะโค้งงอน้อยกว่าภายใต้น้ำหนักกดทับเท่ากัน สำหรับการทดลองในครั้งนี้ จะเป็นการศึกษาสมบัติของวัสดุส่วนที่เป็นคานและการสั่นของคาน เราจะไม่ใช้สมการที่ 1 โดยตรง แต่ประมาณเป็นสมการเชิงเส้นในแต่ละตอนของการทดลอง

อุปกรณ์



รูปที่ 2. อุปกรณ์ที่นำมาทั้งหมดสำหรับการทดลองทั้ง 3 ตอน

1. คานอลูมิเนียมแบน กว้าง 2.5 cm หนา 1.75 mm ยาว 1.0 m จำนวน 2 เส้น มวลเส้นละ 122 g
 - 1 เส้นใช้สำหรับการทดลองทุกตอน
 - อีก 1 เส้นเป็นอุปกรณ์เสริมการทดลอง ใช้ทำเครื่องหมาย วางแนว ฯลฯ
2. สายวัด
3. ไม้บรรทัด
4. กระดาษกาว สำหรับแปะทำเครื่องหมายหรือติดยึดอุปกรณ์
5. นอตตัวผู้ยาวประมาณ 5 cm สำหรับยึดที่รูที่ปลายคานสำหรับใส่แหวนที่ปลายคาน นอตตัวผู้และนอตตัวเมีย 6 เหลี่ยมแต่ละคู่มีมวลรวมกัน 4.80 g
6. นอตหางปลาตัวเมีย แต่ละตัวมีมวล 3.04 g
7. แหวนร่อนนอตขนาดเล็ก (แหวนอีแปะขนาดเล็ก) แต่ละตัวมีมวล 0.55 g
8. เช็มหมุด จำนวน 2 อัน (อาจใช้ติดที่ปลายคานสำหรับเล็ง – ไม่ต้องแกะเทปออกจากปลายหมุด) มวลน้อยมาก
9. แหวนร่อนนอตขนาดใหญ่ (แหวนอีแปะขนาดใหญ่) จำนวน 14 ตัว แต่ละตัวมีมวล 10.40 g
10. คัตเตอร์ (อาจใช้ตัดกระดาษกาว)
11. ตัวจับยึดชิ้นงานรูปตัว G (G clamp) จำนวน 1 ตัว
12. นาฬิกาจับเวลา

ตอนที่ 1 การหาค่า Young's Modulus ของคาน

[8.3 คะแนน]

หากเราสมมติว่าคานโค้งงอเพียงเล็กน้อย เราสามารถใช้การประมาณเชิงเส้นและหาคำตอบของสมการที่ 1 ได้โดยง่าย เราจะพบว่าส่วนปลายด้านที่ยื่นจะอยู่ต่ำกว่า (vertical deflection) Δy แนวระดับของปลายด้านที่โดนยึดแน่น เท่ากับ

$$\Delta y = \frac{L^3}{2Eb^3} (3\mu Lg + 8mg) \quad (2)$$

คำสั่ง

- ยึดคานอลูมิเนียมกับขอบโต๊ะโดยใช้ G clamp บริเวณกลางโต๊ะหรือตามจุดที่เขียนระบุโดยผู้คุมสอบ ให้โคนของคานอยู่ในแนวระดับ โดยมีความยาวคานส่วนที่ยื่น $L = 60 \text{ cm}$ จากขอบโต๊ะ ให้ปลายด้านที่มีรูเป็นด้านที่ยื่นออก
- วัดค่า Δy ของปลายคานเปล่าเนื่องจากน้ำหนักของตัวมันเอง ($m = 0$ ไม่มีมวลถ่วงที่ปลายคาน) เทียบกับแนวระดับของโคนคานด้านที่โดนยึดแน่น
- ให้ชั้นอดยาวสอดในรูที่ปลายคานสำหรับเป็นแกนใส่แหวนอีแปะ ชันนอตให้แน่น แล้วใส่แหวนอีแปะขนาดใหญ่สำหรับเปลี่ยนค่า m ตามจำนวนแหวนที่กำหนดไว้ในตารางบันทึกผล (จำนวนแหวน $N = 1 - 14$)
- plot จุดจากการทดลองในกระดาษกราฟ โดยให้แกน y เป็น Δy และแกน x เป็นมวล m
- ทำซ้ำข้อ 1., 2., 3. และ 4. สำหรับความยาวคาน $L = 90 \text{ cm}$ แล้ว plot จุดในกระดาษกราฟเดียวกัน
- ใช้จุดข้อมูลของคานเปล่า คำนวณค่า E ของคานอลูมิเนียมของแต่ละความยาว L พร้อมระบุค่าคลาดเคลื่อน
- เฉพาะข้อมูลชุด $L = 60 \text{ cm}$ ให้หาค่า E จากความชันของกราฟเส้นตรง พร้อมระบุค่าคลาดเคลื่อน
- เฉพาะข้อมูลชุด $L = 90 \text{ cm}$ ให้วาดเส้นโค้งแนวโน้ม (trendline) ของจุดข้อมูล

คำแนะนำ

- ดูตัวอย่างรูปการทดลองในหน้าถัดไป
- ไม่ต้องคำนึงถึงมวลของรูที่โดนเจาะออกไป
- ให้วัดระยะ L จากปลายคาน

รูปการทดลองตอนที่ 1



รูปที่ 3. การทดลองตอนที่ 1

(บน) แสดงการติดตั้ง (ในกรณีที่ติดกับขอบโต๊ะ) ให้นักเรียนติดตั้งคานกับขอบโต๊ะหรือตามจุดที่กรรมการเขียนระบุไว้

(ล่าง) การใช้ช้อนยาวเป็นแกนสำหรับใส่แหวน

ตอนที่ 2 การศึกษาความโค้งแบบไม่เชิงเส้น

[2.6 คะแนน]

เมื่อความโค้งมากถึงจุดหนึ่งเราจะไม่สามารถประมาณเป็นสมการเชิงเส้นได้ และสมการที่ 2 (การทดลองตอนที่ 1) จะให้ผลทำนายที่ผิดจากค่าจริงไปมาก ความชันของกราฟระหว่าง Δy และ m จะไม่คงตัวและเปลี่ยนไปตามค่า m

ในตอนที่ 2 นี้เราจะวิเคราะห์ข้อมูลและทำการทดลองเพิ่มเติมเพื่อหาจุดที่เราไม่สามารถประมาณด้วยสมการเชิงเส้นได้

ให้ t_N เป็นความชันเฉลี่ยของกราฟ (ในตอนที่ 1) เมื่อใส่แหวนจำนวน N ตัว โดยให้คำนวณจาก

$$t_N = \frac{\Delta y_{N+1} - \Delta y_{N-1}}{m_{N+1} - m_{N-1}} \quad (3)$$

เมื่อ Δy_{N+1} และ Δy_{N-1} คือ vertical deflection เมื่อถ่วงด้วยมวล m ตอนที่ใส่แหวนจำนวน $N + 1$ ตัว และ $N - 1$ ตัวตามลำดับ

ให้ $e_N = \frac{(t_N - t_1)}{t_1} \times 100$ คือเปอร์เซ็นต์ผลต่างความชันเมื่อเทียบกับความชันของจุด $N = 1$

หากยังอยู่ในช่วงการประมาณเชิงเส้นความชันเฉลี่ยของแต่ละจุดจะใกล้เคียงกันมาก หากเป็นช่วงที่ไม่เชิงเส้น ความชันจะเริ่มแตกต่างออกไป ในการทดลองนี้เราจะถือว่า หากค่า $|e_N| > 10\%$ แสดงว่าเริ่มมีผลจากความไม่เชิงเส้น

คำสั่ง

1. ให้คำนวณค่า t_N และค่า e_N ที่ค่า $N = 1 - 13$ โดยใช้ตัวเลขข้อมูลจากตารางบันทึกผลในตอนที่ 1 สำหรับชุดข้อมูล $L = 90$ cm
2. จากการคำนวณที่ได้ จงหาค่า N_{linear} ซึ่งเป็นจำนวนแหวนสูงสุดที่ค่า $|e_N| \leq 10\%$ ของคาน $L = 90$ cm
3. ทำการวัดเพิ่มเติมเพื่อหามุม θ_{linear} (ในหน่วยองศา) ที่ปลายคานทำกับแนวระดับที่ตำแหน่ง N_{linear} นี้ของคาน $L = 90$ cm

ตอนที่ 3 การสั่นของคานยี่น

[9.1 คะแนน]

เมื่อมีการรบกวนให้คานออกจากสมดุล คานสามารถสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติได้หลายค่าขึ้นอยู่กับรูปแบบการสั่น เมื่อนำสมการที่ (1) มาประมาณแบบเชิงเส้น เราพบว่าความถี่ต่ำสุด (f_1) เกิดขึ้นเมื่อทุกส่วนของคานสั่นขึ้นหรือลงพร้อม ๆ กัน

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{(a\mu L + m)L^3}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{ML^3}} \quad (4)$$

$$M = a\mu L + m \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นตัวเลข} \quad (5)$$

ในทางทฤษฎี มวล $a\mu L$ เปรียบเสมือนมวลสมมูลของคาน นั่นคือ เราสามารถนำมวลทั้งหมด M (มวลสมมูลของคานและมวลถ่วง) ไปรวมกันไว้ที่ปลายคาน แล้วใช้โมเดลของคานเบา เราจะได้คำตอบเดียวกัน

คำสั่ง

- ยึดคานอลูมิเนียมโดยใช้ G clamp เลือกค่า L ที่เหมาะสม และใช้ L เพียงตำแหน่งเดียวในการทดลองนี้
- ออกแบบการทดลองและวัดค่าต่าง ๆ ที่จำเป็น แล้วใช้สมการเส้นตรงเพื่อหาค่า E และค่า a โดยไม่ต้องอ้างอิงกับผลการทดลองในตอนที่ 1 พร้อมระบุค่าความคลาดเคลื่อน
- ในการตอบคำถาม ให้นักเรียนวาดรูปและอธิบายวิธีการทดลองและการวัดค่าต่าง ๆ ในกระดานสรุปคำตอบ