

The First Thai National (Junior) Physics Olympiad
Mahidol University at Salaya
Theoretical Competition
9:00-12:00 Friday 19 April 2002

เฉลย:

ข้อ 1.1 (2 คะแนน)

ใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นและหลักการอนุรักษ์พลังงานด้วย

ระบบถูกปล่อยจากสภาวะหยุดนิ่งในตอนเริ่มต้น ดังนั้น ที่เวลาใดๆ หลังจากนั้นจุดศูนย์กลางมวลของระบบก็ต้องนิ่งอยู่ตำแหน่งเดิมไม่ว่าสมาชิกของระบบจะเคลื่อนที่เช่นใด

เมื่อตอนเริ่มต้น จุดศูนย์กลางมวลอยู่ห่างจากกำแพงเป็นระยะทางเท่ากับ $1.0 + 0.5 = 1.5$ เมตร

ต่อมา มวล A เคลื่อนที่เข้าหาจุดศูนย์กลางมวลและอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลเท่ากับ 0.4 เมตร

ดังนั้น ขณะนั้น มวล A จะอยู่ห่างจากกำแพงเท่ากับ $1.5 - 0.4 = 1.1$ เมตร

ตอบ

ข้อ 1.2 (2 คะแนน)

- a. แรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำ (emf) ที่ขณะใดๆ ในวงจรมีขนาดเท่ากับขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์แม่เหล็กที่วงจรล้อมไว้

$$\text{emf} = vLB \quad (\text{ไม่ขึ้นกับมุม } \theta)$$

ดังนั้น ที่จังหวะตั้งต้น ($t = 0, v = v_0$) จึงได้

$$\text{emf} = v_0 LB$$

ตอบ

- b. ในการประมาณอันดับแรก เราอาจไม่พิจารณาผลของกระแสเหนี่ยวนำ $\frac{\text{emf}}{R}$ ที่มีต่อสนาม B แต่จะ

พิจารณาเฉพาะแรงต้านโดยกระแสนี้ต่อการเคลื่อนที่ของลวดตัวนำมวล M

แรงต้านนี้มีขนาดเท่ากับ $\left(\frac{vLB}{R}\right) LB$ และมีทิศทางสวนกับทิศของ v ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ของ M จึง

$$\text{เขียนได้เป็น } M \frac{dv}{dt} = -\frac{(LB)^2}{R} v$$

เราสามารถแก้สมการนี้เพื่อหา v ที่ขณะใดๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} &= -\frac{L^2 B^2}{MR} \\ \int_{v=v_0}^v \frac{1}{v} dv &= \int_{t=0}^t -\frac{L^2 B^2}{MR} dt \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{L^2 B^2}{MR} t \\ \therefore v &= v_0 e^{-\frac{L^2 B^2}{MR} t} \end{aligned}$$

ตอบ

ข้อ 1.3 (2 คะแนน)

ใช้สูตรของการเกิดภาพโดยเลนส์นูนบางๆ $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$

เมื่อวางวัตถุที่ตำแหน่ง A อยู่ห่างจากเลนส์เท่ากับ a ได้ภาพเสมือน ดังนั้นจึงบ่งว่า $a < f$ และ $v_A = -\left(\frac{af}{f-a}\right)$

โดยปริมาณในวงเล็บเป็นค่าบวก

$$\therefore \text{ขนาดของภาพเสมือน/ขนาดของวัตถุ} = \frac{|v_A|}{a} = \frac{f}{f-a}$$

แต่ถ้าวางวัตถุไว้ที่ตำแหน่ง B อยู่ห่างจากเลนส์เท่ากับ b จะได้ภาพจริง ซึ่งบ่งว่า $b > f$ และ $v_B = +\left(\frac{bf}{b-f}\right)$

$$\therefore \text{ขนาดของภาพจริง/ขนาดของวัตถุ} = \frac{|v_B|}{b} = \frac{f}{b-f}$$

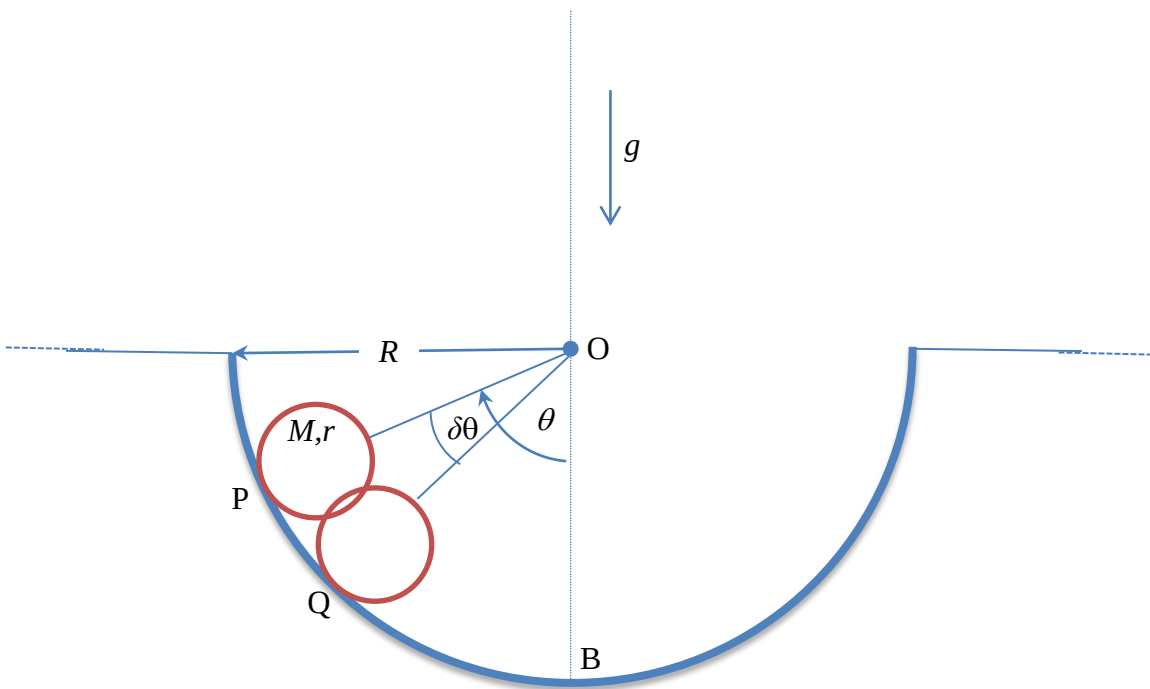
ถ้าขนาดของภาพเสมือนเท่ากับขนาดของภาพจริง จะได้

$$\frac{f}{f-a} = \frac{f}{b-f}$$

$$\therefore f = \frac{1}{2}(a+b)$$

ตอบ

ข้อ 1.4 (2 คะแนน)



พิจารณาการกลิ้งโดยไม่ไถลของ M จากจุดสัมผัส P ไปยังจุดสัมผัส Q บนผิวอ่างทรงกลมรัศมี R ในเวลา δt

ในรูปนี้ มุม $\delta\theta$ จึงมีค่าเป็นลบ (มีค่าลดลง)

$$\delta\theta = -\frac{\text{arc PQ}}{R} \text{ เรเดียน}$$

ในการกลิ้งของ M จาก P ไป Q นั้น M หมุนรอบตัวเองตามเข็มนาฬิกา (เทียบกับระบบอ้างอิงเฉื่อย เช่น เส้น OB) เป็นมุมเพียงเท่ากับ $\frac{\text{arc PQ}}{R} - |\delta\theta|$ เรเดียน หรือเท่ากับ

$$\text{arc PQ} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = (-R\delta\theta) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = - \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \delta\theta$$

ดังนั้น อัตราเร็วเชิงมุมของการหมุนรอบตัวเองของ M เทียบกับระบบอ้างอิงเฉื่อย คือ $\omega = \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \frac{d\theta}{dt}$

นอกจากการหมุนรอบตัวเองแล้ว จุดศูนย์กลางมวลของ M เองยังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v_{CM} ด้วยเทียบกับระบบอ้างอิงเฉื่อยเดียวกัน (เช่น เทียบกับจุด O)

$$v_{CM} = (R-r) \frac{d\theta}{dt}$$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่แบบกลิ้งโดยไม่ไถลของ M จึงมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 &= \frac{1}{2} M (R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} M r^2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{7}{10} M (R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

พลังงานศักย์โน้มถ่วงของ M (วัดเทียบกับระดับผ่านจุด O ถือเป็นศูนย์) ก็คือ $-Mg(R-r)\cos\theta$

หลักอนุรักษ์พลังงานกลบ่งว่า

$$\frac{7}{10} M (R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - Mg(R-r)\cos\theta = -Mg(R-r)\cos\theta_0$$

$$\therefore \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{R-r} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \left[\frac{10}{7} \frac{g}{R-r} (\cos\theta - \cos\theta_0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ใช้เครื่องหมายบวกเมื่อ M กำลังกลิ้งไปทางซ้ายมือ และใช้เครื่องหมายลบเมื่อกำลังกลิ้งไปทางขวามือ

ความเร็วเชิงมุม ω ของทรงกลม M รอบแกนผ่านจุดศูนย์กลางมวลของ M เอง คือ

$$\omega = \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \frac{d\theta}{dt} = \pm \left[\frac{10}{7} \frac{g}{r^2} (R-r) (\cos\theta - \cos\theta_0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

สังเกตว่า $|\omega|$ มีค่าสูงสุดเมื่อ $(\cos\theta - \cos\theta_0)$ มีค่าสูงสุด นั่นคือ เมื่อ $\cos\theta = 1$, $\theta = 0^\circ$ นั่นคือ เมื่อ M กลิ้งลงไปถึงจุด B

ดังนั้น สูตรสำหรับค่าอัตราเร็วสูงสุดของ M รอบแกนผ่านจุดศูนย์กลางมวลของ M เอง คือ

$$\omega_{\max} = \left[\frac{10}{7} \frac{(R-r)g}{r^2} (1 - \cos\theta_0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ตอบ

ข้อ 1.5 (2 คะแนน)

บรรยากาศธรรมดาได้ชั้นไอโอโนสเฟียร์มีค่าความหนาแน่นเป็น $n_i \approx 1$

กฎของสเนลล์ (Snell's law) ให้ผลว่า $n_1 \sin \theta_1 = n_{\text{ionosphere}} \sin \theta_2$

เกิดการสะท้อนกลับหมด (total internal reflection) ได้ถ้ามุม θ_2 สามารถเป็น 90° ได้ ซึ่งในกรณีนั้นจะได้

$$\sin \theta_1 = n_{\text{ionosphere}} \quad \text{ซึ่ง} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{A}}$$

$$\text{มุม } \theta_1 \text{ ค่านี้เรียกว่ามุมวิกฤติ } \theta_c = \arcsin \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{A}}$$

ดังนั้น เมื่อ θ_1 ค่าใดๆ $\geq \theta_c$ ก็จะเกิดการสะท้อนกลับหมด

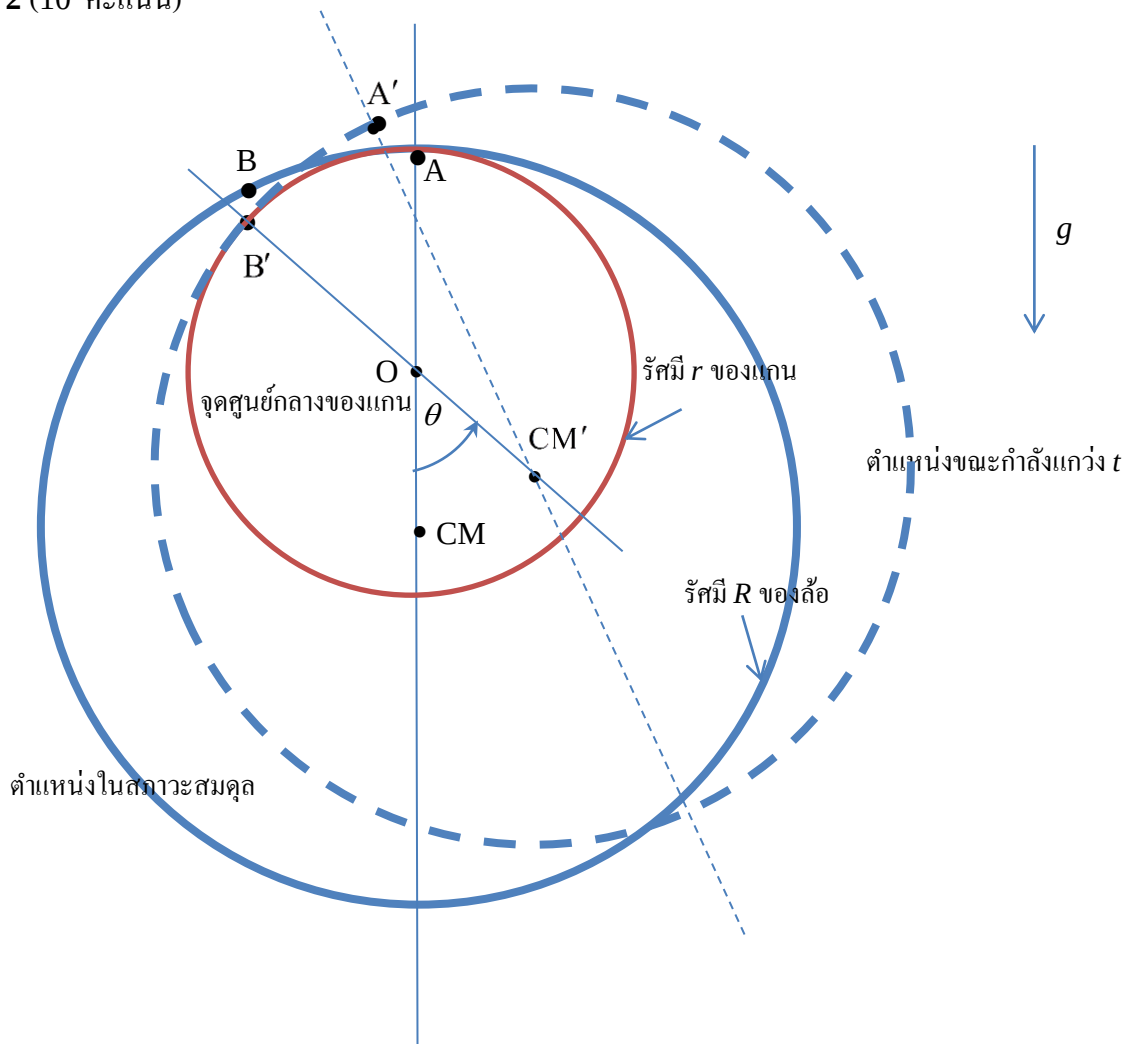
$$\text{อนึ่งรูปบ่งว่า } (R+h) \sin \theta_1 = R \sin \alpha \text{ เสมอ และได้ } \sin \theta_1 = \frac{R \sin \alpha}{R+h}$$

$$\text{ดังนั้น การสะท้อนกลับหมดเกิดขึ้นเมื่อ } \arcsin \left\{ \frac{R \sin \alpha}{R+h} \right\} \geq \arcsin \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{A}}$$

$$\text{นั่นคือ } \lambda \geq \sqrt{A} \left[1 - \left\{ \frac{R \sin \alpha}{R+h} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ดังนั้น ค่าความยาวคลื่นที่สั้นที่สุดที่สามารถสะท้อนกลับหมดได้คือ } \lambda = \sqrt{A} \left[1 - \left\{ \frac{R \sin \alpha}{R+h} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ตอบ}$$

ข้อ 2 (10 คะแนน)



จุด A กับจุด B เป็นสองจุดตรึงบนขอบล้อเมื่ออยู่นิ่งในสภาวะสมดุล ต่อมาวงแหวนกลิ้งโดยไม่ไถลบนแกนทำให้จุด A ขกตัวไปอยู่ที่ A' และ B ลงไปสัมผัสแกนพอดี

จุดศูนย์กลางมวลของวงแหวน(CM) ย้ายจากตำแหน่งเดิมไปที่ CM' เส้น OCM' ทำมุม θ กับแนวดิ่งที่ช่วงเวลา t ดังนั้นวงแหวนที่ช่วงเวลา t นี้ ทำมุมกับแนวดิ่งเพียงเท่ากับ

$$\theta - \angle OCM'A' = \theta - \frac{A'B'}{R} = \theta - \frac{AB}{R} = \theta - \frac{AB'}{R} = \theta - \frac{r\theta}{R}$$

ความเร็วเชิงมุมของวงแหวนจึงเท่ากับ $\left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{d\theta}{dt}$

ความเร่งเชิงมุมของวงแหวนจึงเท่ากับ $\left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{d^2\theta}{dt^2}$

a) จุดศูนย์กลางมวลของวงแหวนเคลื่อนที่ราวกับ (เสมือนกับ) แกว่งรอบจุด O ที่ระยะห่างเท่ากับ $(R-r)$

ดังนั้นที่เวลา t พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวงแหวนเทียบกับจุด A คือ

$$PE = -Mg \{r + (R-r) \cos \theta\}$$

ตอบ

- b) พลังงานจลน์ของวงแหวนประกอบด้วยสองส่วน ส่วนหนึ่งเป็นจากการหมุนของวงแหวนด้วยความเร็ว

เชิงมุม $\left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{d\theta}{dt}$ เทียบกับระบบอ้างอิงเฉื่อย อีกส่วนหนึ่งเนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลด้วยความเร็วเชิงเส้นเท่ากับ $(R-r) \frac{d\theta}{dt}$ ดังนั้นพลังงานจลน์ของวงแหวนคือ

$$\begin{aligned} KE &= \frac{1}{2} (MR^2) \left\{ \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{d\theta}{dt} \right\}^2 + \frac{1}{2} M \left\{ (R-r) \frac{d\theta}{dt} \right\}^2 \\ &= M(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

ตอบ

- c) หลักอนุรักษ์พลังงานบ่งว่า $PE + KE = \text{คงที่}$

$$M(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - Mg \{ r + (R-r) \cos \theta \} = \text{คงที่}$$

ต่อไปหาอนุพันธ์ของสมการนี้เทียบกับ t จะได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{2(R-r)} \sin \theta$$

ตอบ

- d) คำว่าแอมพลิจูดน้อยๆ ในกรณีนี้บ่งว่า $\sin \theta_0 \approx \theta_0$ เมื่อ θ_0 เป็นแอมพลิจูดของการสั่น ดังนั้นสมการใน c)

จึงกลายเป็น

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{2(R-r)} \theta$$

$$\therefore \theta(t) \approx \mathcal{A} \sin \left\{ t \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}} + \mathcal{B} \right\}$$

$$\text{ความถี่ของการสั่นเป็น } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$$

ตอบ

- e) ในกรณีที่ r มีค่าเล็กมากๆ เราได้ $\nu = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2R}}$

ตอบ

สังเกต ในกรณีวงแหวนมวล M รัศมี R แกว่งรอบจุด A ที่ขอบวง

แหวนเราสามารถแสดงได้ว่าสมการของการเคลื่อนที่คือ

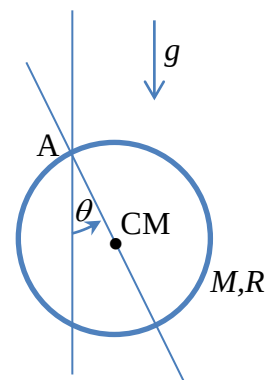
$$I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -MgR \sin \theta$$

ซึ่งในที่นี้ $I_A = I_{CM} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{2R} \sin \theta$$

และสำหรับกรณีที่แอมพลิจูดของการแกว่งมีค่าเล็กมาก เราได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{2R} \theta \text{ ซึ่งแก้สมการได้ผลว่า}$$



$$\theta(t) = \mathcal{A} \sin \left\{ t \sqrt{\frac{g}{2R}} + \mathcal{B} \right\}$$

∴ ความถี่ของการแกว่งคือ $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2R}}$ ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกับข้อ e) ข้างต้น

ข้อ 3 (2 คะแนน)

- a) ระดับผิวน้ำในแขนซ้ายของหลอดรูปตัวยู จะสูงกว่าทางขวา เนื่องจากแรงแม่เหล็กที่เกิดจากการที่กระแสไฟฟ้าตรง (I) ไหลในสนามแม่เหล็ก (B) ผ่านระยะทาง a
แรงแม่เหล็กมีขนาดเท่ากับ IaB
แรงนี้ผลักดันของสารละลายไปทางซ้ายมือทำให้ระดับน้ำทางแขนซ้ายสูงกว่าทางแขนขวา **ตอบ**
- b) ระดับน้ำทางแขนซ้ายสูงกว่าทางแขนขวาอยู่ Δx ซึ่งทำให้แรงดันสถิตของน้ำทางซ้ายของแผ่นอิเล็กโทรดมีขนาดสูงกว่าแรงดันสถิตทางขวาของแผ่นอิเล็กโทรดอยู่เท่ากับ $(Dg\Delta x)(ab)$
แรงแม่เหล็ก IaB เสริมแรงดันสถิตทางด้านขวาให้มีขนาดเท่ากับของแรงดันสถิตทางซ้ายจึงอยู่ในสภาวะสมดุลพอดี ดังนั้น $abDg\Delta x = IaB$ และ $\Delta x = \frac{IB}{Dgb}$ **ตอบ**
- c) อัตราการสูญเสียพลังงานไฟฟ้าไปเป็นความร้อนในสารละลายเกิดขึ้นในเนื้อสารระหว่างแผ่นอิเล็กโทรดด้วย
อัตรา $W = I^2 R$ ซึ่ง R เป็นค่าความต้านทานของเนื้อสารละลายที่อยู่ระหว่างแผ่นอิเล็กโทรด $R = \frac{a}{\sigma bL}$
ดังนั้น $W = \frac{I^2 a}{\sigma bL}$ **ตอบ**
ในกรณีที่ $a = b = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, $L = 0.1 \text{ m}$, $h = 10^{-2} \text{ m}$
 $B = 0.1 \text{ T}$, $\sigma = 1.0 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, $D = 1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
จะได้ $W = 10I^2$
ค่า I หาได้จากข้อ b) $I = \frac{Dgb}{B} \Delta x$ ซึ่ง $\Delta x \equiv h = 10^{-2} \text{ m}$
∴ $I = \frac{1.2 \times 10^3 \times 9.8 \times 10^{-2} \times 10^{-2}}{1.0} = 1.176 \text{ A}$
ได้ $W = 10 \times (1.176)^2 = 13.8 \text{ W}$