

เฉลยข้อที่ 1

[10 คะแนน]

1.1 หยดน้ำและไฟกระพริบ

[5 คะแนน]

a.) SOLUTION

หยดถัดไปเคลื่อนที่เข้าไปแทนที่หยดก่อนหน้า ที่ตำแหน่งเดียวกัน ในจังหวะที่ไฟสว่างพอดีเนื่องจากคาบเท่ากัน จึงทำให้เห็นเสมือนกับว่าหยดน้ำอยู่ที่เดิม

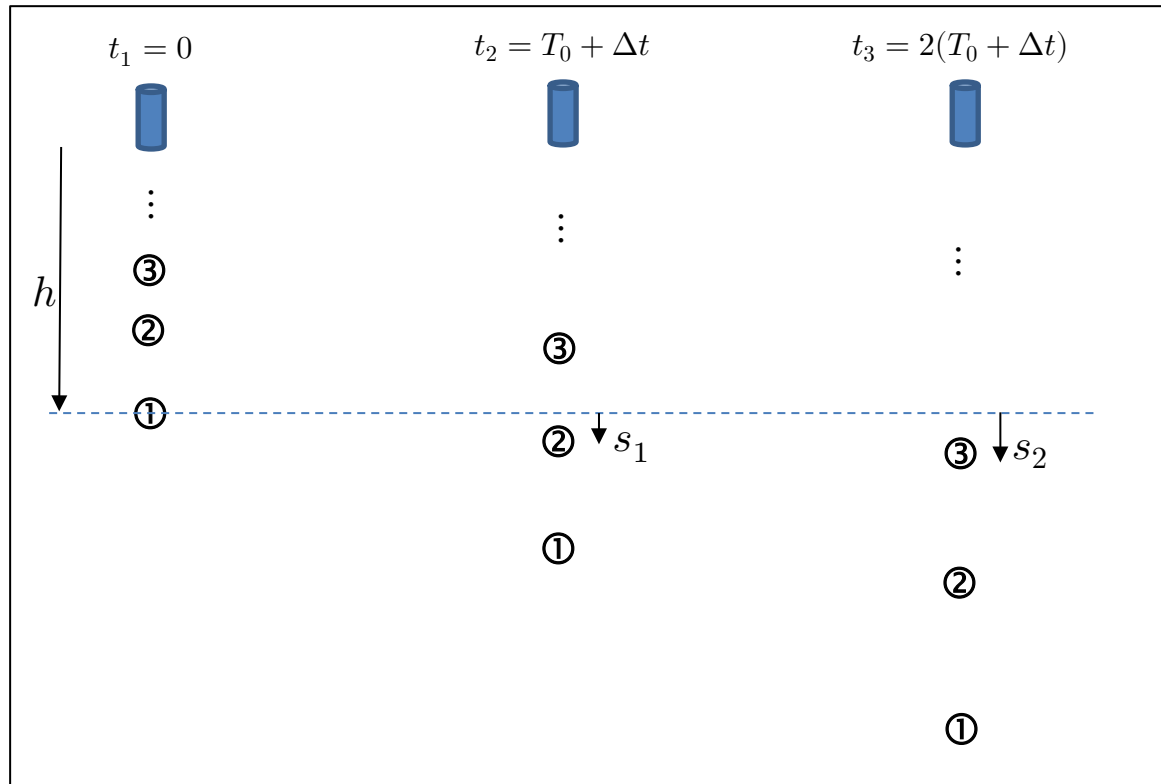
หรือ

เป็นตำแหน่งปรากฏแบบเดียวกับการมองผ่าน stroboscope ที่คาบเท่ากัน

b.) SOLUTION

เมื่อ $\Delta t \neq 0$ หยกน้ำจะไม่ปรากฏที่ตำแหน่งเดิม แต่จะมีการเลื่อนไปเล็กน้อย

พิจารณาหยดหนึ่ง ① ที่ผ่านตำแหน่ง h ที่เวลา $t = t_1 = 0$ และเป็นจังหวะที่ไฟสว่าง
หยดนี้มีความเร็วจริงเท่ากับ g และมีความเร็วจริงเท่ากับ $u_h = \sqrt{2gh}$



หยดถัดไป ② จะเคลื่อนที่มาที่ตำแหน่ง h เมื่อเวลาผ่านไป T_0 พอดี (แต่ไฟยังมืด) และจะเคลื่อนที่ต่อไป ได้การกระจัดปรากฏ s_1 หลังจากเวลาผ่านไปอีก Δt เมื่อไฟสว่างที่เวลา $t_2 = T_0 + \Delta t$
การกระจัดปรากฏของหยด ② จึงเท่ากับ $s_1 = u_h \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$

หยดถัดไป ③ จะเคลื่อนที่มาที่ตำแหน่ง h เมื่อเวลาผ่านไป $2T_0$ พอดี (แต่ไฟยังมืด) และจะเคลื่อนที่ต่อไป ได้การกระจัดปรากฏ s_2 หลังจากเวลาผ่านไปอีก $2\Delta t$ เมื่อไฟสว่างที่เวลา $t_3 = 2(T_0 + \Delta t)$
การกระจัดปรากฏของหยด ③ จึงเท่ากับ $s_2 = u_h (2\Delta t) + \frac{1}{2} g (2\Delta t)^2$

เมื่อถึงจุดนี้ สามารถพิจารณาต่อได้ 2 แบบคือ

แบบที่ 1: แบบทั่วไป

หรือเมื่อพิจารณา step ที่ n ที่เวลา $t = n(T_0 + \Delta t)$ จะได้ว่า

$$s_n = u_n(n\Delta t) + \frac{1}{2}g(n\Delta t)^2 \text{ เมื่อแทนค่า } n \text{ จะได้}$$

$$s_n = u_n \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right) t + \frac{1}{2}g \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right)^2 t^2 \text{ ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว ดังนั้น ความเร็วปรากฏ}$$

$$u' = u_n \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} = \frac{\sqrt{2gh\Delta t}}{T_0 + \Delta t}$$

และความเร่งปรากฏ

$$a' = g \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right)^2$$

แบบที่ 2: สมมติให้เคลื่อนที่แบบความเร่งปรากฏคงตัว

ให้ความเร็วปรากฏเป็น u' และ ความเร่งปรากฏเป็น a' จะได้ว่า

$$s_1 = u_n \Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 = u'(T_0 + \Delta t) + \frac{1}{2}a'(T_0 + \Delta t)^2 \text{ และ}$$

$$s_2 = u_n(2\Delta t) + \frac{1}{2}g(2\Delta t)^2 = u'(2T_0 + 2\Delta t) + \frac{1}{2}a'(2T_0 + 2\Delta t)^2$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$u' = u_n \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} = \frac{\sqrt{2gh\Delta t}}{T_0 + \Delta t}$$

และ

$$a' = g \left(\frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} \right)^2$$

c.) SOLUTION

เมื่อ $t = 0$ จะเห็นหยดน้ำอยู่นิ่งกับที่ (ความเร็วปรากฏเป็นศูนย์) และจะเริ่มเคลื่อนที่ลงเมื่อ $t > 0$ หลังจากนั้นจะหยุดนิ่งอีกครั้งที่เวลา $t = \pi/\omega$ ก่อนจะเคลื่อนที่ขึ้น แล้วมาหยุดนิ่งที่ตำแหน่งตั้งต้นเมื่อ $t = 2\pi/\omega$

การคิดแอมพลิจูด

ค่าแอมพลิจูดหาจากระยะเคลื่อนที่ปรากฏจากเวลา $t = 0$ ถึง $t = \pi/2\omega$ หรือ คิดจากครึ่งหนึ่งของระยะปรากฏจาก $t = 0$ ถึง $t = \pi/\omega$ (หยุดนิ่ง $\rightarrow$ หยุดนิ่ง)

ความเร็วสุดท้าย Terminal Velocity

ระยะระหว่างหยด d_0 และเวลาระหว่างหยด T_0 ดังนั้น Terminal Velocity $u_0 = d_0/T_0$ (ความเร็วจริง ไม่ใช่ความเร็วปรากฏ)

ระยะทางปรากฏที่เคลื่อนที่ เมื่อความเร่งเป็นศูนย์

แบบ 1. ใช้ประโยชน์จากความเร็วปรากฏในข้อ b.

ระยะปรากฏ $\Delta s = \int u' dt$ เมื่อความเร็วปรากฏ $u' = u_0 \Delta t / (T_0 + \Delta t)$ โดยการเลียนแบบจากข้อ b. เมื่อ $\Delta t = \tau \sin \omega t$ ดังนั้น

$$\Delta s = \int_{t=0}^t u_0 \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} dt \approx \int_{t=0}^t u_0 \frac{\tau \sin \omega t}{T_0} dt$$

ซึ่งได้

$$\Delta s = \frac{u_0 \tau}{\omega T_0} - \frac{u_0 \tau}{\omega T_0} \cos \omega t$$

แสดงว่าแอมพลิจูด

$$A = \frac{u_0 \tau}{\omega T_0}$$

หรือคิดจาก

$$A = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2\omega}} u_0 \frac{\Delta t}{T_0 + \Delta t} dt \approx \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2\omega}} u_0 \frac{\tau \sin \omega t}{T_0} dt$$

ได้คำตอบ $A = u_0 \tau / T_0 \omega$ เช่นเดียวกัน

แทนค่า u_0 จะได้

$$A = \frac{d_0 \tau}{T_0^2 \omega}$$

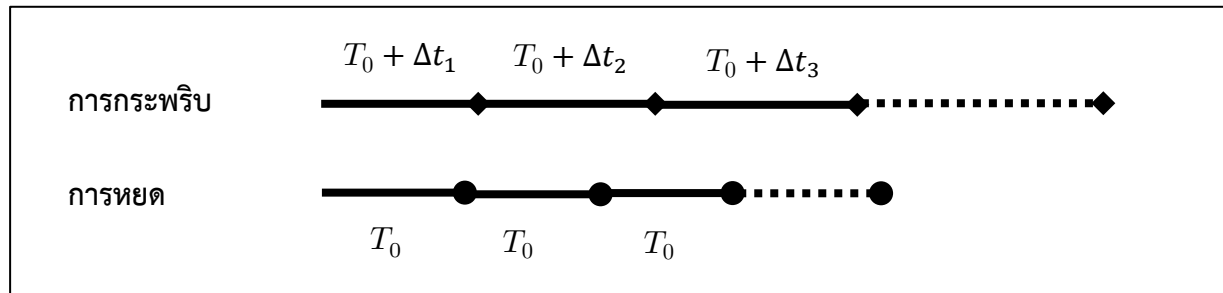
แบบ 2. คำนวณโดยตรง

เวลาที่เข้ามาของการกระพริบครั้งที่ 1 เท่ากับ $\Delta t_1 \approx \tau \sin \omega(T_0)$

เวลาที่เข้ามาของการกระพริบครั้งที่ 2 เท่ากับ $\Delta t_2 \approx \tau \sin \omega(2T_0)$

เวลาที่เข้ามาของการกระพริบครั้งที่ 3 เท่ากับ $\Delta t_3 \approx \tau \sin \omega(3T_0)$

...ตามลำดับ...



ระยะปรากฏ $s = u_0 \sum \Delta t_n$ เมื่อ u_0 เป็นความเร็ว terminal velocity (ความเร็วจริง) และ $\sum \Delta t_n$ เป็นเวลาส่วนเกินที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ปรากฏ (เหมือนกับข้อ b.)

จำนวนหยดจาก $t = 0$ ถึง $t = \pi/2\omega$ เท่ากับ $N = \pi/2\omega T_0 \gg 1$ ดังนั้น

$$A = u_0 \sum_{n=1}^{n=N} \tau \sin n\omega T_0$$

แทนค่า $\theta = \omega T_0$ ได้คำตอบ

$$A = \frac{u_0 \tau \sin \left(N \frac{\omega T_0}{2} \right) \sin \left((N+1) \frac{\omega T_0}{2} \right)}{\sin \frac{\omega T_0}{2}} \approx \frac{u_0 \tau}{\omega T_0}$$

แทนค่า u_0 จะได้

$$A = \frac{d_0 \tau}{T_0^2 \omega}$$

หมายเหตุ

นักเรียนสามารถค้นหาลิขสิทธิ์ปรากฏการณ์นี้ใน YouTube ด้วยคำว่า “strobe light water drops”

1.2 แหนบเชิงแสง

[5.0 คะแนน]

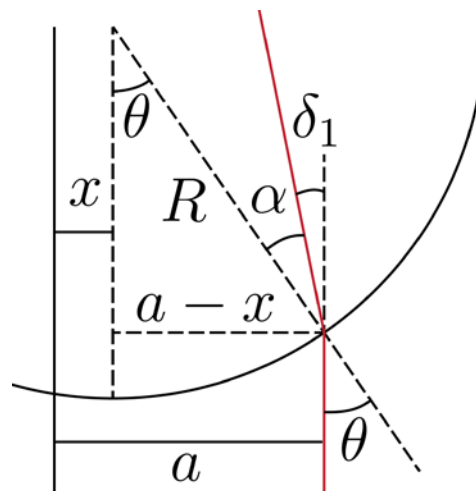
a) จงหาค่ามุมเบี่ยงเบน δ ของลำแสง A ในรูปของ x และค่าคงที่อื่นที่โจทย์กำหนด

ให้มุมตกกระทบเป็น θ และมุมหักเหเป็น α จากกฎของสเนลล์จะได้ว่า

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \alpha \rightarrow \sin \theta = n \sin \alpha$$

เนื่องจาก $a, x \ll R$ จะได้ว่ามุม $\theta, \alpha \ll 1$ ทำให้ค่า $\sin x \approx x$ และ

$$\theta = n\alpha$$



การหามุมเบี่ยงเบนทำได้จากการพิจารณาผลรวมของมุมเบี่ยงเบนที่เกิดจากการหักเหแต่ละครั้ง โดยที่มุมเบี่ยงเบนที่เกิดจากการหักเหที่ผิวล่างและบนนั้นมีค่าเท่ากันคือ

$$\delta_1 = \theta - \alpha = \left(\frac{n-1}{n}\right) \theta$$

ดังนั้นมุมเบี่ยงเบนรวมทั้งหมดคือ

$$\delta = 2\delta_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}\right) \theta$$

จากรูปด้านบนจะได้ว่า

$$\sin \theta = \frac{a-x}{R} \approx \theta$$

เมื่อนำค่า θ ไปแทนในมุมเบี่ยงเบนจะได้

$$\delta = 2\delta_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{a-x}{R}\right)$$

b) จงหาจำนวนของโฟตอนของลำแสง A ที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วในช่วงเวลา Δt

ในช่วงเวลา Δt นั้นพลังงานของแสงที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วจะมีค่าเป็น $P\Delta t$ เนื่องจากโฟตอนแต่ละตัวมีพลังงานเป็น hc/λ จำนวนโฟตอนที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วในช่วงเวลาดังกล่าวมีค่าเป็น

$$\Delta n_{\text{photon}} = \frac{P\Delta t}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{P\lambda}{hc} \Delta t$$

c) จงหาขนาดของโมเมนตัมที่ถูกส่งเข้าสู่ลูกแก้วด้วยโฟตอนของลำแสง A ในช่วงเวลา Δt

เนื่องจากโฟตอนแต่ละอนุภาคมีโมเมนตัม h/λ ดังนั้นขนาดโมเมนตัมที่ถูกส่งผ่านสู่ลูกแก้วคือ

$$\Delta p_{\text{in}} = \frac{h}{\lambda} \Delta n_{\text{photon}} = \frac{P\Delta t}{c}$$

d) หาแรงที่ลำแสง A ทำกับลูกแก้ว

อันดับแรกเราพิจารณาแรงที่ลูกแก้วกระทำกับลำแสง ซึ่งสามารถหาได้จากอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของแสงจากก่อนวิ่งเข้าสู่ลูกแก้วและหลังจากวิ่งออกจากลูกแก้ว

สำหรับในแนวแกน y ในช่วงเวลา Δt

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{in}}^y = \frac{P\Delta t}{c}$$

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งออกจากลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{out}}^y = \frac{P\Delta t}{c} \cos \delta$$

ดังนั้นโมเมนตัมที่ไปเปลี่ยนไปของแสงในแนวแกน y ในช่วงเวลา Δt คือ

$$\Delta p_{\text{laser}}^y = \frac{P}{c} (\cos \delta - 1) \Delta t \approx 0$$

สำหรับในแนวแกน x ในช่วงเวลา Δt

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งเข้าสู่ลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{in}}^x = 0$$

$$\text{โมเมนตัมของแสงที่วิ่งออกจากลูกแก้วคือ } \Delta p_{\text{out}}^x = -\frac{P\Delta t}{c} \sin \delta$$

ดังนั้นโมเมนตัมที่ไปเปลี่ยนไปของแสงในแนวแกน x ในช่วงเวลา Δt คือ

$$\Delta p_{\text{laser}}^x = -\frac{P}{c} \sin \delta \Delta t \approx -\frac{P}{c} \delta \Delta t = -2 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a-x}{R} \right) \Delta t$$

จากกฎข้อที่สามของนิวตัน เราจะได้ว่าแรงที่แสงทำต่อลูกแก้วนั้นมีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงข้าม ซึ่งคือ

$$\vec{F}_A = -\frac{\Delta p_{\text{laser}}^x}{\Delta t} \hat{x} = 2 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a-x}{R} \right) \hat{x}$$

e) หาความถี่ของการสั่นของลูกแก้ว

สำหรับลำแสง B ค่ามุมเบี่ยงเบนนั้นจะสามารถเขียนได้อยู่ในรูปเดียวกับลำแสง A นั่นคือ

$$\delta_B = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \theta_B$$

โดยที่มุมตกกระทบ θ_B มีค่าเป็น $\theta_B = \frac{a+x}{R}$ ดังนั้นมุมเบี่ยงเบนคือ

$$\delta_B = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a+x}{R} \right)$$

ดังนั้นแรงที่ลำแสง B กระทำต่อลูกแก้วคือ

$$\vec{F}_B = \frac{P}{c} \sin \delta_B (-\hat{x}) = 2 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{a+x}{R} \right) (-\hat{x})$$

จะเห็นว่าทิศที่ได้ของแรงจะตรงข้ามกับแรงจากลำแสง A เนื่องจากแสงเบี่ยงเบนในทิศตรงกันข้าม

แรงลัพธ์ที่กระทำต่อลูกแก้วเนื่องจากลำแสงทั้งสองคือ

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_B + \vec{F}_A = -4 \frac{P}{c} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{x}{R} \right) \hat{x}$$

จาก $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ เราได้ว่า

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4P}{mcR} \left(\frac{n-1}{n} \right) x = -\omega^2 x$$

แสดงว่า

$$\omega^2 = \frac{4P}{mcR} \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

เฉลยข้อที่ 2

[10 คะแนน]

ตอนที่ 1 อากาศแห้ง

[3 คะแนน]

2.1 SOLUTION

การเปลี่ยนแปลงแบบ adiabatic จะได้ความสัมพันธ์

$$pV^\gamma = \text{constant}$$

$$p\left(\frac{T}{p}\right)^\gamma = \text{constant}$$

$$p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{constant}$$

$$T \propto p^{1-(1/\gamma)}$$

เราสามารถหา γ ได้จาก

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7R/2}{5R/2} = \frac{7}{5}$$

ดังนั้น

$$T \propto p^{2/7}, \quad k = \frac{2}{7}$$

MARKING SCHEME

Item	Marks (0.8)
a) เขียนความสัมพันธ์ของกระบวนการ adiabatic	0.4
b) เขียนนิยาม γ ถูกต้อง (0.1) และหาค่าถูกต้อง (0.1)	0.2
c) ได้ค่า k ถูกต้อง	0.2

2.2 SOLUTION

จาก $T \propto p^{2/7}$ เราสามารถเขียน

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7}$$

2.3 SOLUTION

วิธีที่ 1

จากข้อ 2.1 $T \propto p^{2/7}$ เราจะได้

$$\frac{dT}{dp} = \frac{2T}{7p}$$

สามารถหาอัตราส่วน T/p ได้จากกฎของแก๊สอุดมคติ

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{\rho RT}{\mu}$$

ดังนั้น

$$\frac{T}{p} = \frac{\mu}{\rho R}$$

และ

โจทย์กำหนดให้

$$\frac{dT}{dp} = \frac{2\mu}{7\rho R}$$

เราสามารถเขียน

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= \frac{dT}{dp} \frac{dp}{dz} \\ &= \frac{2\mu}{7\rho R} (-\rho g) \\ &= -\frac{2g\mu}{7R}\end{aligned}$$

วิธีที่ 2

จากกฎข้อ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ $Q = dU + pdV$ และกระบวนการ adiabatic ($Q = 0$)

$$\begin{aligned}0 &= \frac{5}{2}nRdT + pdV \\ &= \frac{5}{2}nRdT + (nRdT - Vdp)\end{aligned}$$

$$\frac{7}{2}nRdT = Vdp$$

$$\frac{7}{2} \frac{m}{\mu} RdT = \frac{m}{\rho} dp$$

$$\frac{7R}{2\mu} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{7R}{2\mu} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho} (-\rho g)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2g\mu}{7R}$$

2.4 SOLUTION

จาก

$$\frac{dT}{dz} = -\alpha, \quad \alpha = \frac{2g\mu}{7R}$$

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจาก T_0 เป็น T_1 เมื่อความสูงเพิ่มจาก $z = 0$ ไปเป็น $z = z_1$ เราจะได้

$$\frac{T_1 - T_0}{z_1 - 0} = -\alpha$$

$$z_1 = -\frac{1}{\alpha}(T_1 - T_0)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \left(T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2/7} - T_0 \right)$$

$$= \frac{T_0}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2/7} \right)$$

(ใช้คำตอบข้อ 2.2)

ตอนที่ 2 อากาศขึ้น

[7 คะแนน]

2.5 SOLUTION

เมื่อแก๊สได้รับความร้อน Q จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายใน $\Delta U = (5/2)nR\Delta T$ และทำงาน $p\Delta V$ โดยที่ ΔT และ ΔV เป็นการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเล็ก ๆ ตามลำดับ จากกฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์

$$\begin{aligned} Q &= \frac{5}{2}nR\Delta T + p\Delta V \\ &= \frac{5}{2}nR\Delta T + (nR\Delta T - V\Delta p) \\ &= \frac{7}{2}nR\Delta T - V\Delta p \end{aligned}$$

2.6 SOLUTION

สมมติให้อากาศประกอบด้วยส่วนที่เป็นแก๊สอุดมคติและส่วนที่เป็นไอน้ำ มวลของไอน้ำ $-\Delta m_v$ ($\Delta m_v < 0$) จะควบแน่นกลายเป็นหยดน้ำ และคายความร้อนขนาด $Q = -L_v\Delta m_v$ ให้กับส่วนที่เป็นแก๊สอุดมคติ ดังนั้นความร้อนที่แก๊สอุดมคติได้รับคือ

$$\begin{aligned} -L_v\Delta m_v &= \frac{7}{2}nR\Delta T - V\Delta p \\ \frac{7}{2}nR\Delta T &= V\Delta p - L_v\Delta m_v \\ \Delta T &= \frac{2V}{7nR}\Delta p - \frac{2}{7nR}L_v\Delta m_v \\ &= \frac{2T}{7P}\Delta p - \frac{2\mu}{7m_{gas}R}L_v\Delta m_v \\ &= \frac{2T}{7P}\Delta p - \frac{2\mu}{7R}L_v\left(\frac{\Delta m_v}{m_{gas}}\right)_{\Delta\beta} \\ &= \frac{2T}{7P}\Delta p - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \end{aligned}$$

โดยการเขียน $\Delta p = (dp/dz)\Delta z = -\rho g\Delta z$ สมการด้านบนจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{2T}{7p}(-\rho g\Delta z) - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \\ &= -\frac{2g\rho T}{7p}\Delta z - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \\ &= -\frac{2g\mu}{7R}\Delta z - \frac{2\mu}{7R}L_v\Delta\beta \quad \left(\frac{T}{p} = \frac{\mu}{\rho R}\right) \\ &= -\alpha\Delta z - \frac{\alpha L_v}{g}\Delta\beta \quad \left(\alpha = \frac{2g\mu}{7R}\right) \end{aligned}$$

สำหรับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ $\Delta T = T_2 - T_1$ และการเปลี่ยนแปลงความสูง $\Delta z = z_2 - z_1$ สมการข้างบนบรรยายการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้น

$$T_2 - T_1 = \underbrace{-\alpha(z_2 - z_1)}_{\text{dry adiabatic expansion}} - \underbrace{\frac{\alpha L_v}{g}\Delta\beta}_{\text{condensation}}$$

โดยที่ $\Delta\beta = \beta(T_2) - \beta(T_1)$ ซึ่งสามารถหาได้จากกราฟในรูปที่ 2 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้นในสมการนี้มาจาก 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นผลจากการขยายตัวของอากาศแบบ adiabatic เช่นเดียวกับอากาศแห้ง และส่วนที่สองเป็นเทอมแก้ไขซึ่งเป็นผลจากการควบแน่นของไอน้ำ

2.7 SOLUTION

เมื่ออากาศแห้งลอยตัวสูงขึ้นจากพื้นดินและขยายตัวแบบ adiabatic อุณหภูมิเปลี่ยนจาก T_0 เป็น $T_1 = T_0(p_1/p_0)^{2/7}$ (ข้อ 2.2) และความสูงเพิ่มจาก $z = 0$ เป็น $z = z_1 = (T_0/\alpha)[1 - (p_1/p_0)^{2/7}]$ (ข้อ 2.4) เมื่อแทนค่าต่าง ๆ จะได้

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7} = (293) \left(\frac{84.2}{100}\right)^{2/7} = 279 \text{ K } (5.95^\circ\text{C})$$

และ

$$z_1 = \frac{T_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7}\right] = \frac{293}{9.78 \times 10^{-3}} \left[1 - \left(\frac{84.2}{100}\right)^{2/7}\right] = 1.44 \times 10^3 \text{ m}$$

จากสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้น ถ้าเราพิจารณาเทอมที่เป็นการขยายตัวแบบ adiabatic เราจะสามารถหา z_2 ได้จากสมการคล้ายกับสมการด้านบน

$$z_2 = \frac{T_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{2/7}\right] = \frac{293}{9.78 \times 10^{-3}} \left[1 - \left(\frac{70.0}{100}\right)^{2/7}\right] = 2.90 \times 10^3 \text{ m}$$

2.8 SOLUTION

จาก $T_1 = 5.95^\circ\text{C}$ เมื่อพิจารณากราฟจะพบว่า $\beta(T_1) = 6.0 \times 10^{-3}$ จากนั้นแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศขึ้น

$$T_2 - T_1 = -\alpha(z_2 - z_1) - \frac{\alpha L_v}{g} \Delta\beta$$

$$T_2 = T_1 - \alpha(z_2 - z_1) - \frac{\alpha L_v}{g} [\beta(T_2) - \beta(T_1)]$$

$$T_2 = 5.95^\circ\text{C} - (9.78 \times 10^{-3})(2.90 - 1.44) \times 10^3 - \frac{(9.78 \times 10^{-3})(2.5 \times 10^6)}{9.81} [\beta(T_2) - (6.0 \times 10^{-3})]$$

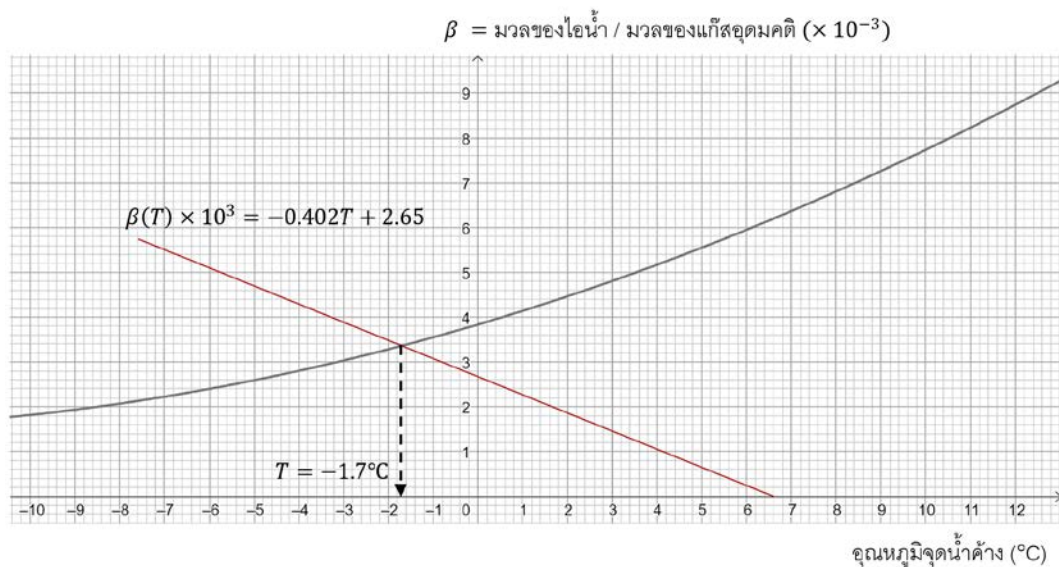
$$T_2 = -8.33^\circ\text{C} - 2.49 \times 10^3 [\beta(T_2) - (6.0 \times 10^{-3})]$$

$$T_2 = -8.33^\circ\text{C} - 2.49[\beta(T_2) \times 10^3] + 14.9^\circ\text{C}$$

$$2.49[\beta(T_2) \times 10^3] = -T_2 + 6.61^\circ\text{C}$$

$$\beta(T_2) \times 10^3 = -0.402T_2 + 2.65$$

สมการนี้เป็นสมการเส้นตรง เมื่อลากเส้นตรงนี้บนกราฟในรูปที่ 2 เราสามารถหาจุดตัดและอ่านค่าอุณหภูมิได้ $T_2 = -1.7^\circ\text{C}$



2.9 SOLUTION

คำนวณอัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิตามความสูงของอากาศขึ้น

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta z} &= \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} \\ &= \frac{-1.7 - 5.95}{(2.90 - 1.44) \times 10^3} \\ &= -5.2^\circ\text{C} \cdot \text{km}^{-1} \end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าประมาณครึ่งหนึ่งของอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของอากาศแห้ง

เฉลยข้อที่ 3

ตอนที่ 1 เลนส์แรงโน้มถ่วง

[7.8 คะแนน]

3.1 SOLUTION

เขียนมิติของมวล M ถูก (M)

เขียนมิติของ c ถูก ($L T^{-1}$)

เขียนมิติของ G ถูก ($L^3 M^{-1} T^{-2}$)

ดัชนีหักเหแสงเป็นปริมาณที่ไร้มิติ หรือ ไม่มีหน่วย

แทนหน่วยลงในสมการ

$$n = 1 + \frac{2G^i M^j}{rc^k}$$

จะได้ระบบสมการ

$$3i - k = 1$$

$$i = j$$

$$2i = k$$

แก้สมการได้ค่า $i = j = 1$ และ $k = 2$

3.2 SOLUTION

ใช้พีทาโกรัส จะสามารถเขียน $\ell_1 = \sqrt{y^2 + d_1^2} + \sqrt{y^2 + d_2^2}$

ใช้การประมาณ Binomial

$$\ell_1 \approx d_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{d_1^2} \right) + d_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{d_2^2} \right)$$

จัดรูป

$$\ell_1 \approx d_1 + d_2 + \frac{y^2(d_1 + d_2)}{2d_1d_2}$$

3.3 SOLUTION

ใช้นิยาม $n = c/v$ และ $v = d\ell/dt$

จะได้

$$dt = \frac{nd\ell}{c}$$

3.4 SOLUTION

แทน $n = 1 + 2GM/rc^2$ ใน $dt = nd\ell/c$ แล้วทำการอินทิเกรตจากจุด A ไปยังจุด B จะได้

$$t = \frac{\ell_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \int \frac{1}{r} d\ell$$

เนื่องจากเส้นทางสามารถประมาณเป็นเส้นตรง เราสามารถประมาณ

$$d\ell = dx, \quad r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

ทำการใส่ขอบเขตของการอินทิเกรตจาก $x = -d_1$ ไปยัง $x = d_2$

ใช้สูตรอินทิเกรตที่ให้ในข้อสอบ

$$t = \frac{\ell_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{\sqrt{y^2 + d_2^2} + d_2}{\sqrt{y^2 + d_1^2} - d_1} \right)$$

ใช้การประมาณ Binomial $\sqrt{y^2 + d_2^2} + d_2 \approx 2d_2$

ใช้การประมาณ Binomial $\sqrt{y^2 + d_1^2} - d_1 \approx y^2/2d_1$

จะได้

$$t \approx \frac{\ell_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{4d_1d_2}{y^2}\right)$$

3.5 SOLUTION

นักเรียนตระหนักว่าค่าน้อยสุดเกิดเมื่อ $dt/dy = 0$

ทำการหาอนุพันธ์

$$\frac{d\ell_1}{dy} = \frac{y(d_1 + d_2)}{d_1d_2}, \quad \frac{d}{dy} \left[\ln\left(\frac{4d_1d_2}{y^2}\right) \right] = -\frac{2}{y}$$

แทนค่าใน $dt/dy = 0$ จะได้สมการ

$$y^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1d_2}{d_1 + d_2}$$

3.6 SOLUTION

จากรูป เราจะสามารถเขียน $y = \beta d_2$

แทน y ใน

$$y^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1d_2}{d_1 + d_2}$$

จัดรูป

$$\beta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2}$$

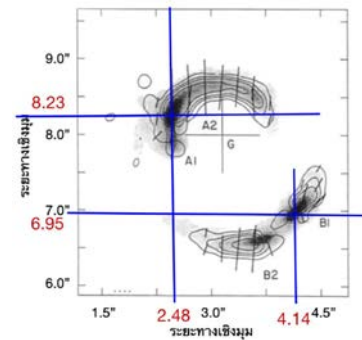
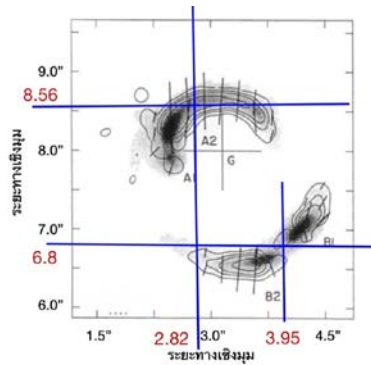
$$\beta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2}}$$

ตอนที่ 2 วงแหวนของไอน์สไตน์

[2.2 คะแนน]

3.7 SOLUTION

ทำการวัดรูป 3.4 (ข) ด้วยไม้บรรทัดและระบุจุดศูนย์กลางที่อยู่บนขอบของวงแหวนโดยจุดศูนย์กลางควรอยู่ฝั่งตรงข้ามกัน
ตัวอย่างเช่น



จากรูปศูนย์กลาง ใช้พิกทอรัสคำนวณหาระยะเชิงมุมของเส้นผ่านศูนย์กลาง

คำตอบจะอยู่ในช่วง $\beta = 1.05'' \pm 0.10''$

จากข้อมูล คำนวณหา $d_1 = 2360$ Mpc

แปลงหน่วย

$$\beta = \frac{1.05}{3600} \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

แปลงหน่วย

$$d_1 + d_2 = 3300 \times 10^6 \times 3.086 \times 10^{13} \times 10^3 \text{ m}$$

แทนค่าใน

$$\beta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2}$$

เพื่อหามวล $M = 3.546 \times 10^{41} \text{ kg} = 3.55 \times 10^{41} \text{ kg}$ (ตอบ 2 ถึง 3 sf)

ช่วงคำตอบ $M = (3.55 \pm 0.34) \times 10^{41} \text{ kg}$