



Solution ข้อ 1

ข้อ 1.1 (3.0 คะแนน)

a) พิสูจน์ว่า $L = \frac{2v^2 \sin \theta_0}{g}$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ช้ารอยเดิม เราสรุปได้ว่า มวล m จะกลับทิศความเร็วหลังการชน แต่มีอัตราเร็ว v เท่าเดิม นอกจากนี้ ความเร็วของมวล m ก่อนและหลังชนต้องตั้งฉากกับคาน

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์

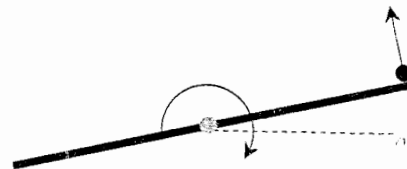
เวลาการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง

$$\Delta t = \frac{2v \cos \theta_0}{g}$$

เวลาการเคลื่อนที่ในแนวนอน

$$\Delta t = \frac{L \cos \theta_0}{v \sin \theta_0}$$

เวลาทั้งคู่ต้องเท่ากัน ดังนั้น $L = \frac{2v^2 \sin \theta_0}{g}$



หลังการชน

b) พิสูจน์ว่า $ML\omega = 6mv$

ระหว่างการชน แรงภายนอกที่กระทำต่อ m และ M คือแรงโน้มถ่วงและแรงจากแกนหมุน

1. เนื่องจากเวลาการชนสั้นมากจึงไม่ต้องคำนึงถึงอิมพัลส์จากแรงโน้มถ่วง
2. อิมพัลส์จากแกนหมุนไม่เปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ (เมื่อคิดรอบจุดหมุน)

แนวทางที่ 1. หาความสัมพันธ์จากอิมพัลส์ของการชน ให้ F เป็นแรงเฉลี่ยที่ m กระทำกับ M

หลังจากการชนมวล m กลับทิศ และคานหมุนกลับทิศเช่นกัน ดังนั้น

$$F\delta t = mv - (-mv) = 2mv$$

$$\text{และ } \frac{L}{2} F\delta t = I_{cm}\omega - (-I_{cm}\omega) = 2I_{cm}\omega$$

แนวทางที่ 2. ใช้การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมก่อนและหลังการชน เนื่องจาก F เป็นแรงภายใน และแรงอื่นๆ ไม่ทำ

ให้โมเมนตัมเชิงมุมเปลี่ยน ดังนั้น $I_{cm}\omega - mv\frac{L}{2} = -I_{cm}\omega + mv\frac{L}{2}$

ทั้ง 2 แนวทางนำไปสู่สมการ $I_{cm}\omega = mv\frac{L}{2}$

เมื่อแทนค่า $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$ จะได้ $ML\omega = 6mv$ หรือ $k = 6$



c) หาค ความสัมพันธ์ของมวล m และ M

เวลาที่ของโปรเจกไทล์เท่ากับเวลาที่คานหมุน

$$\Delta t = \frac{2\theta_0}{\omega} = \frac{L \cos \theta_0}{v \sin \theta_0}$$

แทนค่า $ML\omega = 6mv$ และจัดรูปได้

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{3} \theta_0 \tan \theta_0$$

กรณีใช้เวลาของโปรเจกไทล์เป็น $\Delta t = \frac{2v \cos \theta_0}{g}$ จะติดค่า g ซึ่งต้องกำจัดทิ้งโดยใช้

$$L = \frac{2v^2 \sin \theta_0}{g} \text{ หรือกระบวนการอื่น($$

Full Solution (อาจมีรางวัลพิเศษ)

คานสามารถหมุนได้หลายรอบก่อนที่มวล m จะชนที่ปลายอีกข้างหนึ่ง เส้นทางการเคลื่อนที่ของโปรเจกไทล์เป็น) พาราโบลาอยู่เหนือวงกลมรัศมี $\frac{L}{2}$)

ให้ $n = 1, 2, 3, \dots$ เป็นจำนวนครั้งที่คานหมุนไป

เวลาที่คานหมุน

$$\Delta t = \frac{n\pi + 2\theta_0}{\omega}$$

ทำให้ได้คำตอบ

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{6} (n\pi + 2\theta_0) \tan \theta_0$$



ข้อ 1.2 (4.0 คะแนน)

(a) จงหาอัตราการดูดกลืนรังสีความร้อนทั้งหมดต่อหน่วยพื้นที่ ที่ผิวนิ่งชั้นใน

$$\begin{aligned}
 E_{\text{absorb on 2}} &= E_1\alpha_2 + E_1(r_1r_2)\alpha_2 + E_1(r_1r_2)^2\alpha_2 + \dots + E_1(r_1r_2)^3\alpha_2 + \dots \\
 &\quad + E_2r_1\alpha_2 + E_2r_1(r_1r_2)\alpha_2 + E_2r_1(r_1r_2)^2\alpha_2 + \dots \\
 &= E_1\alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1r_2)^n + E_2r_1\alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1r_2)^n \\
 &= (E_1\alpha_2 + E_2r_1\alpha_2) \sum_{n=0}^{\infty} (r_1r_2)^n \\
 &= (E_1\alpha_2 + E_2r_1\alpha_2) \frac{1}{1 - r_1r_2} \\
 &= \frac{E_1\alpha_2 + E_2(1 - \alpha_1)\alpha_2}{1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} \\
 &= \frac{E_1\alpha_2 + E_2\alpha_2 - E_2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}
 \end{aligned}$$

(b) จงหาอัตราความร้อนสุทธิต่อหน่วยพื้นที่ที่ส่งผ่านผิวนิ่งชั้นในทั้งหมด

$$\begin{aligned}
 E_{\text{net}} &= E_2 - \frac{E_1\alpha_2 + E_2\alpha_2 - E_2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \\
 &= \frac{E_2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2) - (E_1\alpha_2 + E_2\alpha_2 - E_2\alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \\
 &= \frac{E_2\alpha_1 - E_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \\
 &= \frac{\varepsilon_2\sigma T_2^4\alpha_1 - \varepsilon_1\sigma T_1^4\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \\
 &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma T_1^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} \\
 &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}
 \end{aligned}$$



(c) จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไรน้ำแข็งจึงละลายหมด

เนื่องจาก $T_2 < T_1$ พลังงาน E_{net} น้อยกว่าแปลความร้อนถ่ายเทออกน้อยกว่าเข้า

$$\frac{Q}{t} = \frac{mL}{t} = -E_{net} A = -E_{net} 2\pi rh$$

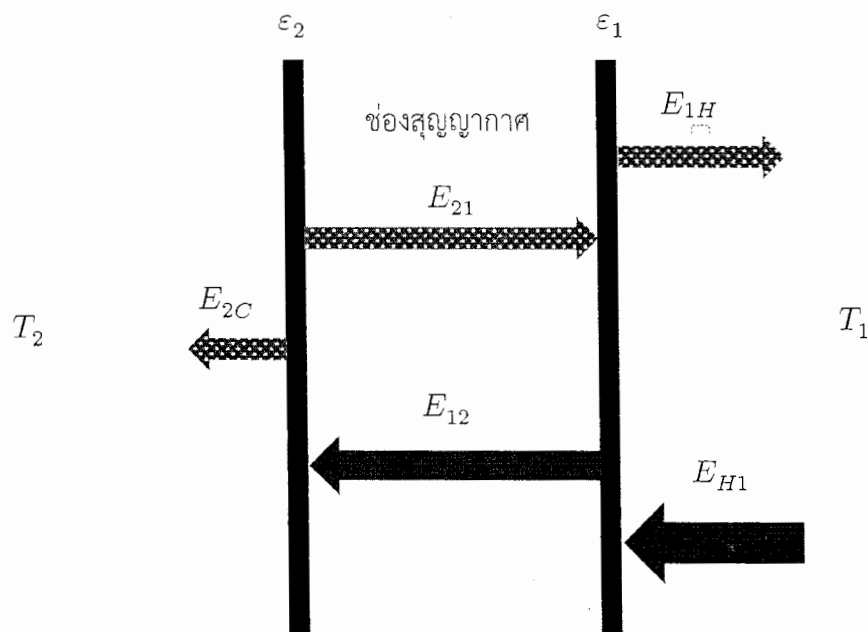
$$t = \frac{mL}{-E_{net} 2\pi rh} = -\frac{mL}{\left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_1^4)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2}\right) 2\pi rh}$$

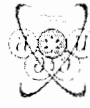
$$= \frac{mL(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2)}{2\pi rh \epsilon_1 \epsilon_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}$$

$$= \frac{(0.5)(336 \times 10^3)(0.08 + 0.08 - 0.08 \times 0.08)}{2\pi(0.03)(0.2)(0.08)(0.08)(5.670373 \times 10^{-8})((273 + 25)^4 - 273^4)}$$

$$= 5.39307 \times 10^5 \text{ s} = 6.24 \text{ days}$$

Alternative Solutions ข้อ 1.2 a) และ b)





(a) จงหาอัตราการดูดกลืนรังสีความร้อนทั้งหมดต่อหน่วยพื้นที่ ที่ผนังชั้นใน

ใช้กฎอนุรักษ์พลังงานกับการแผ่รังสีของวัตถุดำ

$$1: E_{12} = \varepsilon_1 E_{H1} + (1 - \alpha_1) E_{21}$$

$$2: E_{21} = (1 - \alpha_2) E_{12}$$

$$3: E_{2C} = \alpha_2 E_{12}$$

$$4: E_{1H} = \alpha_1 E_{21}$$

แก้สมการหา E_{2C} และ E_{1H}

$$E_{12} = \varepsilon_1 E_{H1} + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) E_{12}$$

$$E_{12}(1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)) = \varepsilon_1 E_{H1}$$

$$E_{12} = \frac{\varepsilon_1 E_{H1}}{(1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2))} = \frac{\varepsilon_1 E_{H1}}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$E_{2C} = \alpha_2 E_{12} = \frac{\alpha_2 \varepsilon_1 E_{H1}}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$E_{1H} = \alpha_1 E_{21} = \alpha_1 (1 - \alpha_2) E_{12} = \frac{\alpha_1 (1 - \alpha_2) \varepsilon_1 E_{H1}}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

E_{2C} คือพลังงานจากผิวนอกที่ถูกดูดกลืนโดยผนังชั้นใน

E_{1H} คือพลังงานจากผิวนอกที่ถูกดูดกลืนกลับโดยผิวในเอง และเนื่องจากความสมมาตรของปัญหา เราจึงสามารถสรุปได้ว่าสมการพลังงานจากผิวในที่ถูกดูดกลืนโดยผิวในมีรูปแบบคล้ายกันคือ

$$E'_{2C} = \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1) \varepsilon_2 E'_{C2}}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

ฉะนั้นพลังงานที่ถูกดูดกลืนบนผนังชั้นในทั้งหมดคือ

$$E_{2C} + E'_{2C} = \frac{\alpha_2 \varepsilon_1 E_{H1}}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} + \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1) \varepsilon_2 E'_{C2}}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \varepsilon_1 E_{H1} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 = E_1 \text{ และ } \varepsilon_2 E'_{C2} = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 = E_2$$

$$E_{2C} + E'_{2C} = \frac{\alpha_2 E_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} + \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1) E_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} = \frac{E_1 \alpha_2 + E_2 \alpha_2 - E_2 \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

(b) จงหาอัตราความร้อนสุทธิต่อหน่วยพื้นที่ที่ส่งผ่านผนังชั้นในทั้งหมด

กำหนดให้ ความร้อนไปทางขวาเป็นบวก

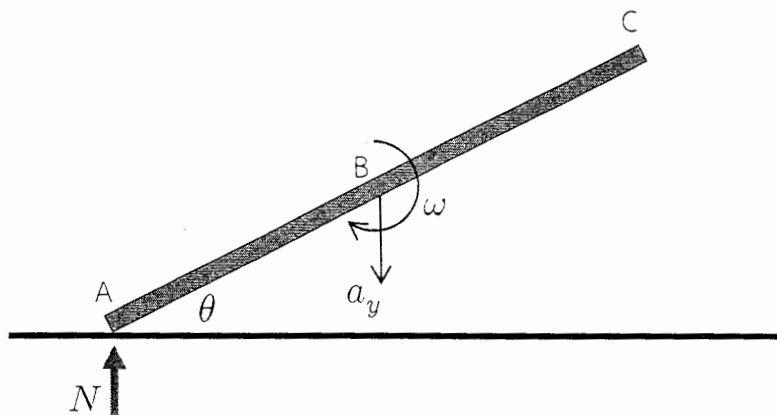
$$\begin{aligned}
 E_{net} &= E'_{1H} - E_{2C} \\
 &= \frac{\alpha_1 E_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} - \frac{\alpha_2 E_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \\
 &= \frac{\varepsilon_2 \sigma T_2^4 \alpha_1 - \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \\
 &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_1^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \\
 &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_1^4)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}
 \end{aligned}$$

ข้อ 1.3 (3.0 คะแนน)

a) ตอบได้เลยโดยไม่ต้องคำนวณ เป็น g สำหรับมวลทุกก้อน

[0.3 คะแนน]

b) ลองพิจารณาการเคลื่อนที่ของท่อนไม้โดยไม่มียกก่อนมวลผูกอยู่ดังนี้



เนื่องจากพื้นลื่น จุด cm ของไม้จะเคลื่อนที่ลงในแนวตั้งเท่านั้น ท่อนไม้จะหมุนและปลาย A จะไถลไปทางซ้าย

ตำแหน่งในแนวตั้งของจุด cm $y = \frac{L \sin \theta}{2}$

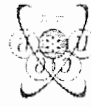
ขนาดความเร่งของ cm เทียบกับพื้น $a_y = \frac{1}{2} \alpha L \cos \theta$

[ให้คะแนนด้านล่างในบางกรณีที่ต้องใช้สมการนี้]

ความเร่งเชิงมุมของท่อนไม้ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

ในการคำนวณการหมุน เราจะใช้สมการทอร์ก $\tau = \frac{dL}{dt}$ เมื่อ L เป็นโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดหมุน [0.1 คะแนน]

เราสามารถเลือกจุดอ้างอิงในการคำนวณทอร์กและการเปลี่ยนโมเมนตัมได้หลายแบบ ข้างล่างเป็นตัวอย่าง 4 แบบ



แบบที่ 1. ใช้จุดนิ่งซ้อนกับปลาย A เป็นจุดอ้างอิง จะได้

$$\text{ทอร์ก (จากน้ำหนักของท่อนไม้)} \quad \tau = Mg \frac{L \cos \theta}{2} \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

การเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม (การหมุนรอบ cm + การเคลื่อนที่ของ cm)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{12} ML^2 \alpha + M \frac{L \cos \theta}{2} \frac{L \cos \theta}{2} \alpha \quad [0.4 \text{ คะแนน}]$$

แบบที่ 2. ใช้จุดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับปลาย A เป็นจุดอ้างอิง จะได้

จุดอ้างอิงมีความเร่ง $a_{x,A} = \alpha \frac{L}{2} \sin \theta$ ทำให้เกิดแรงเทียม $F = Ma_{x,A}$ ไปทางขวามือ

ทอร์ก (จากน้ำหนักของท่อนไม้ + แรงเทียม)

$$\tau = Mg \frac{L \cos \theta}{2} + F \frac{L}{2} \sin \theta = Mg \frac{L \cos \theta}{2} + M \alpha \frac{L}{2} \sin \theta \frac{L}{2} \sin \theta \quad [0.4 \text{ คะแนน}]$$

การเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม (การหมุนรอบปลาย A)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{3} ML^2 \alpha \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

แบบที่ 3. ใช้จุดนิ่งซ้อนกับจุด B (กึ่งกลางไม้) เป็นจุดอ้างอิง จะได้

ทอร์ก (แรงปฏิกิริยาจากพื้น) $\tau = N \frac{L \cos \theta}{2}$ โดยที่ $N = Mg - Ma_y$

$$\tau = (Mg - M \alpha \frac{L \cos \theta}{2}) \frac{L \cos \theta}{2} \quad [0.4 \text{ คะแนน}]$$

การเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม (การหมุนรอบ cm เท่านั้น) (แนวการเคลื่อนที่ของ cm ผ่านจุดหมุน)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{12} ML^2 \alpha \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

แบบที่ 4. ใช้จุดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับ B เป็นจุดอ้างอิง จะได้

มีแรงเทียม $F = Ma_y$ กระทำในทิศขึ้นบน $N = Mg - F = M(g - a_y)$

ทอร์ก (แรงปฏิกิริยาจากพื้น) $\tau = N \frac{L \cos \theta}{2}$

$$\tau = M(g - \alpha \frac{L \cos \theta}{2}) \frac{L \cos \theta}{2} \quad [0.4 \text{ คะแนน}]$$

การเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม (การหมุนรอบ cm)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{12} ML^2 \alpha \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

ทั้ง 4 แบบสามารถจัดรูปสมการ $\tau = \frac{dL}{dt}$ ได้

$$Mg \frac{L}{2} \cos \theta = (\frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 \cos^2 \theta) \alpha$$

$$\alpha = \frac{6g}{L} \frac{\cos \theta}{(1+3 \cos^2 \theta)} \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

สรุป

ความเร่งของจุด A เท่ากับ $a_A = 0$

[0.1 คะแนน]

ความเร่งของจุด B เท่ากับ $a_B = \alpha \frac{L}{2} \cos \theta = g \frac{3 \cos^2 \theta}{1+3 \cos^2 \theta}$

[0.2 คะแนน]

ความเร่งของจุด C เท่ากับ $a_C = \alpha L \cos \theta = g \frac{6 \cos^2 \theta}{1+3 \cos^2 \theta}$

[0.2 คะแนน]

c) จุด C มีความเร่งมากที่สุด ดังนั้นเชือกทุกเส้นจะหย่อนถ้า

$$a_C = g \frac{6 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} < g \quad [0.2 \text{ คะแนน}]$$

หาช่วงที่เชือกหย่อนทั้งสามเส้น $\cos \theta < \sqrt{\frac{1}{3}}$ หรือ $\theta > \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \approx 54.7^\circ$ [0.1 คะแนน]

(เครื่องหมายต้องเป็น $\theta > 54.7^\circ$ หากไม่ระบุเครื่องหมายของช่วงจะไม่ได้คะแนน 0.1)

d)

สำหรับมวล 2

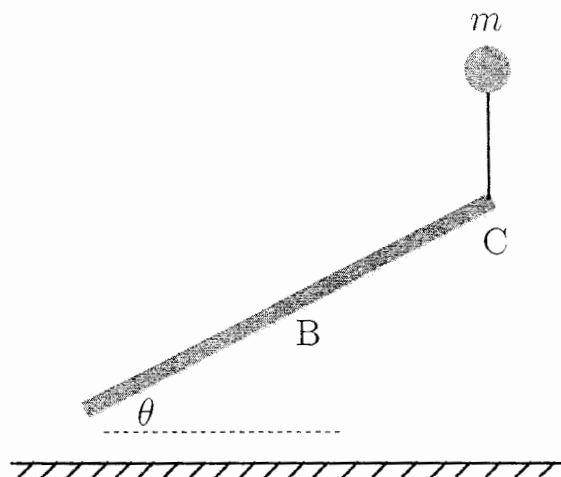
ความเร่งจุด B เท่ากับ $a_B = g \frac{3 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$ ซึ่งน้อยกว่า g เสมอ

ดังนั้น มวลที่ผูกกับเชือกที่จุด B จะมีความเร่งเท่ากับ g (ตกอิสระ)

[0.1 คะแนน]

สำหรับมวล 3

กรณี $\theta < 54.7^\circ$ เชือก C จะตึงแล้วมวลที่ผูกไว้ที่ปลาย C จะมีความเร่งลงมากกว่า g เราหาความเร่งนี้ได้จากการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุดังรูป



เราสามารถเลือกจุดอ้างอิงในการคำนวณทอร์กและการเปลี่ยนโมเมนตัมได้หลายแบบ ข้างล่างเป็นตัวอย่าง 2 แบบ

แบบที่ 1. ใช้จุดนิ่งซ้อนกับปลาย A เป็นจุดอ้างอิง จะได้

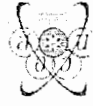
ทอร์ก (จากน้ำหนักของท่อนไม้ + น้ำหนักก้อนมวล)

$$\tau = Mg \frac{L \cos \theta}{2} + mgL \cos \theta \quad [0.3 \text{ คะแนน}]$$

การเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม

(การหมุนของรอบ cm ของ M + การเคลื่อนที่ของ cm ของ M + การเคลื่อนที่ของ m)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{12} ML^2 \alpha + M \frac{L \cos \theta}{2} \frac{L \cos \theta}{2} \alpha + m(\alpha L \cos \theta)(L \cos \theta) \quad [0.4 \text{ คะแนน}]$$



แบบที่ 2. ใช้จุดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับปลาย A เป็นจุดอ้างอิง จะได้

จุดอ้างอิงมีความเร่ง $a_{x,A} = \alpha \frac{L}{2} \sin \theta$ มีแรงเหวี่ยงทำกับ M และ m ไปทางขวามือ

ทอร์ก (จากน้ำหนักของท่อนไม้ + แรงเหวี่ยง)

$$\tau = Mg \frac{L \cos \theta}{2} + (M \alpha \frac{L}{2} \sin \theta) \frac{L}{2} \sin \theta + (m \alpha \frac{L}{2} \sin \theta)(l + L \sin \theta)$$

[0.3 คะแนน]

การเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม

(การหมุนรอบปลาย A + การเคลื่อนที่ไปทางแกน x และ y ของ m)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{3} ML^2 \alpha + m(\alpha \frac{L}{2} \sin \theta)(l + L \sin \theta) + m(\alpha L \cos \theta)(L \cos \theta)$$

[0.4 คะแนน]

แก้สมการ $\tau = \frac{dL}{dt}$ ได้

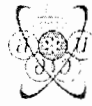
$$\alpha = \frac{6g}{L} \frac{(1+2\frac{m}{M}) \cos \theta}{(1+3 \cos^2 \theta + 12\frac{m}{M} \cos^2 \theta)}$$

[0.1 คะแนน]

หาความเร่งมวล 3 ได้

$$a_3 = \alpha L \cos \theta = 6g \frac{(1+2\frac{m}{M}) \cos^2 \theta}{(1+3 \cos^2 \theta + 12\frac{m}{M} \cos^2 \theta)}$$

[0.1 คะแนน]



Solution ข้อ 2

2.1 ตามกฎมือขวา ตัวเลือก A ให้แรงที่กระทำต่อขดลวดในทิศ $-\hat{z}$

[1.0 คะแนน]

2.2 แรงที่กระทำต่อประจุ หาได้จาก

[1.0 คะแนน]

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะขนาดของแรง เราจะได้

$$|\vec{F}| = euB_r$$

ความต่างศักย์ หรืออีเอ็มเอฟ หาได้จาก

$$V = |\vec{E}|d = \frac{|\vec{F}|}{e} 2\pi rN = 2\pi rNB_r u$$

หรือจะใช้กฎของฟาราเดย์ก็ได้ แต่ต้องวาดผิวสำหรับการคำนวณฟลักซ์ให้ชัดเจน

$$V = \left| -\frac{d\Phi_B}{dt} \right| = 2\pi rNB_r \frac{dz}{dt} = 2\pi rNB_r u$$

2.3

[1.5 คะแนน]

จากกราฟที่ให้มา เราเขียนการกระจัดได้ด้วยฟังก์ชัน

$$z(t) = (1.00 \text{ mm}) \sin(2\pi ft) \text{ โดยที่ } f = 12.5 \text{ Hz}$$

ความเร็วของขดลวดหาได้โดยใช้

$$u(t) = \dot{z}(t) = 2\pi f (1.00 \text{ mm}) \cos(2\pi ft)$$

จากกราฟที่ให้มา เราเขียนความต่างศักย์ได้

$$V(t) = (400.0 \text{ mV}) \cos(2\pi ft)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ที่ได้จากข้อก่อนหน้า

$$V(t) = 2\pi rNB_r u(t)$$

เราจะได้

$$(400.0 \text{ mV}) = 2\pi rNB_r 2\pi f (1.00 \text{ mm})$$

$$B_r = \frac{400.0 \text{ mV}}{2\pi \times 0.10 \text{ m} \times 100 \times 0.001 \text{ m} \times 2\pi (12.5 \text{ Hz})} = 0.081 \text{ T}$$



2.4

[1.0 คะแนน]

แรงแม่เหล็กไฟฟ้า หาได้จาก $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = -IN2\pi r B_r \hat{z}$

$$mg = IN2\pi r B_r$$

$$m = \frac{1.928 \text{ A} \times 100 \times 2\pi \times 0.10 \text{ m} \times 0.081 \text{ T}}{9.8122567 \text{ m/s}^2} = 1.0 \text{ kg}$$

2.5

[1.0 คะแนน]

จาก $mg = IN2\pi r B_r$

และ $V = 2\pi r N B_r u$

เราจะได้ $\frac{mg}{V} = \frac{I}{u}$

หรือ $m = \frac{IV}{ug}$

2.6

[1.0 คะแนน]

$$V = Af \frac{h}{e} \text{ หมายความว่า } a = 1, b = 1 \text{ และ } c = -1$$

2.7

[2.0 คะแนน]

ฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่าน คือ $\Phi_B = BHW = k \frac{h}{e}$ ซึ่งทำให้เราเขียนสนามแม่เหล็กได้ว่า

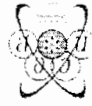
$$B = k \frac{h}{eHW}$$

เมื่อนำไปแทนค่าในสมการ

$$R = \frac{B}{enL} = k \frac{h}{e^2 nLWH}$$

แต่ LWH คือปริมาตรของตัวนำไฟฟ้า ดังนั้น $nLWH$ จึงเท่ากับจำนวนอิเล็กตรอนในตัวนำไฟฟ้า N_e (ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่มีมิติ) สุดท้ายเราจะได้

$$R = \frac{k}{N_e} \frac{h}{e^2} \text{ ซึ่งเราสรุปได้ว่า } \frac{k}{N_e} \text{ เป็นค่าคงที่ของการแปรผันที่ไม่มีมิติ}$$



2.8

[1.0 คะแนน]

เราสามารถเขียนความต่างศักย์ให้อยู่ในรูป $V \propto f_1 \frac{h}{e}$

ส่วน กระแสไฟฟ้านั้น เขียนได้ในรูป $I = \frac{V'}{R} \propto \frac{f_2 \frac{h}{e}}{\frac{h}{e^2}} \propto f_2 e$

จาก $m = \frac{VI}{ug}$

เราจะได้ $m \propto \frac{f_1 f_2 h}{ug}$

2.9

[0.5 คะแนน]

เนื่องจากเป็นผลคูณทั้งหมด เราจึงสามารถรวมความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ได้โดยตรง

$$\frac{\delta m}{m} = 1.2 \times 10^{-8} + 2 \times 1.0 \times 10^{-15} + 4.4 \times 10^{-9} + 1.7 \times 10^{-9}$$

$$\frac{\delta m}{m} = 1.8 \times 10^{-8}$$

จะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของมวลที่ได้จากตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้านั้น สามารถที่จะน้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อนของมวล IPK ได้



Solution ข้อ 3

ตอน A: ความสัมพันธ์ของคลื่นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเสียง

3.1

จาก $\frac{d}{dx} P = -\rho_0 \frac{d}{dt} v$

จะได้ $kP_m \cos(kx - \omega t + \phi_P) = \omega \rho_0 v_m \cos(kx - \omega t)$

แสดงว่า $\phi_P = 0$

และ $kP_m = \omega \rho_0 v_m = ck \rho_0 v_m$

หรือ $z = \frac{P_m}{v_m} = \rho_0 c$

3.2

จาก $\frac{d}{dt} \rho + \rho_0 \frac{d}{dx} v = 0$

จะได้ $-\omega \rho_m \cos(kx - \omega t + \phi_\rho) + \rho_0 k v_m \cos(kx - \omega t) = 0$

แสดงว่า $\phi_\rho = 0$

และ $\frac{\rho_m}{v_m} = \frac{\rho_0}{c}$

3.3

$$\frac{P_m}{\rho_m} = \frac{\frac{P_m}{v_m}}{\frac{\rho_m}{v_m}} = c^2$$

3.4

จาก $P = \frac{P_a}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma$

แสดงว่า

(a) $k = \frac{P_a}{\rho_0^\gamma}$

และจะได้

(b) $P = \frac{P_a}{\rho_0^\gamma} [\rho_0 + \rho_m \sin(kx - \omega t)]^\gamma = P_a \left[1 + \frac{\rho_m}{\rho_0} \sin(kx - \omega t) \right]^\gamma$

$$P \approx P_a \left[1 + \gamma \frac{\rho_m}{\rho_0} \sin(kx - \omega t) \right]$$



$$P_m = \gamma \frac{\rho_m P_a}{\rho_0}$$

$$\frac{P_m}{\rho_m} = \frac{\gamma P_a}{\rho_0} = c^2$$

ดังนั้น

$$(c) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma P_a}{\rho_0}}$$

ตอน B: พลังงานและโมเมนตัมของเสียง

3.5

$$K_V = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_m \sin(kx - \omega t + \phi_\rho)) v_m^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi_\rho)$$

$$K_V \approx \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi_\rho)$$

$$\bar{K}_V = \frac{1}{4} \rho_0 v_m^2$$

3.6

$$\bar{p}_V = \overline{\rho v} = \rho_0 v_m \overline{\sin(kx - \omega t)} + \rho_m v_m \overline{\sin^2(kx - \omega t)}$$

$$(a) \quad \bar{p}_V = \frac{1}{2} \rho_m v_m = \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 / c$$

$$(b) \quad \bar{p}_V = \frac{2}{c} \bar{K}_V$$

ตอน C: คลื่นเสียงและแรงกระทำต่อวัตถุ

3.7

สมการด้านซ้ายมือ

$$\text{จาก} \quad P = P_a + P_m \sin(kx - \omega t) + B \sin^2(kx - \omega t)$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{d}{dx} P = k P_m \cos(kx - \omega t) + 2k B \sin(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t)$$

สมการด้านขวามือ

$$-\rho \frac{d}{dt} v = \omega \rho_0 v_m \cos(kx - \omega t) + \omega \rho_m \sin(kx - \omega t) v_m \cos(kx - \omega t)$$

ดังนั้น



$$B = \frac{\omega \rho_m v_m}{2k} = \frac{c \rho_m v_m}{2} = \frac{P_m^2}{2\rho_0 c^2}$$

$$\bar{P} = P_a + P_m \overline{\sin(kx - \omega t + \phi_\rho)} + \frac{P_m^2}{2\rho_0 c^2} \overline{\sin^2(kx - \omega t + \phi_\rho)}$$

$$\bar{P} = P_a + \frac{P_m^2}{4\rho_0 c^2}$$

3.8

แอมพลิจูดของคลื่นนิ่งความดันที่ผิวกระทบคือ

$$P_m = 2P_0$$

$$v_0 = \frac{P_0}{\rho_0 c}$$

คิดจากแรงดันจะเกิดเป็นแรงยกเท่ากับ

$$F = (\bar{P} - P_a)a = \frac{P_0^2}{\rho_0 c^2} a$$

คิดจากการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเสียงจะเกิดแรงยกเท่ากับ

$$F = 2ac\bar{p}_V = a\rho_0 v_0^2/c = \frac{P_0^2}{\rho_0 c^2} a$$

3.9

$$20 \log\left(\frac{P_m}{20 \times 10^{-6}}\right) = 120$$

$$P_m = 20 \times 10^{-6} \times 10^6 = 20 \text{ Pa}$$

$$\frac{F}{a} = \frac{P_m^2}{\rho_0 c^2} = \frac{400}{138720} = 2.9 \times 10^{-3} \text{ N/m}^2$$
