

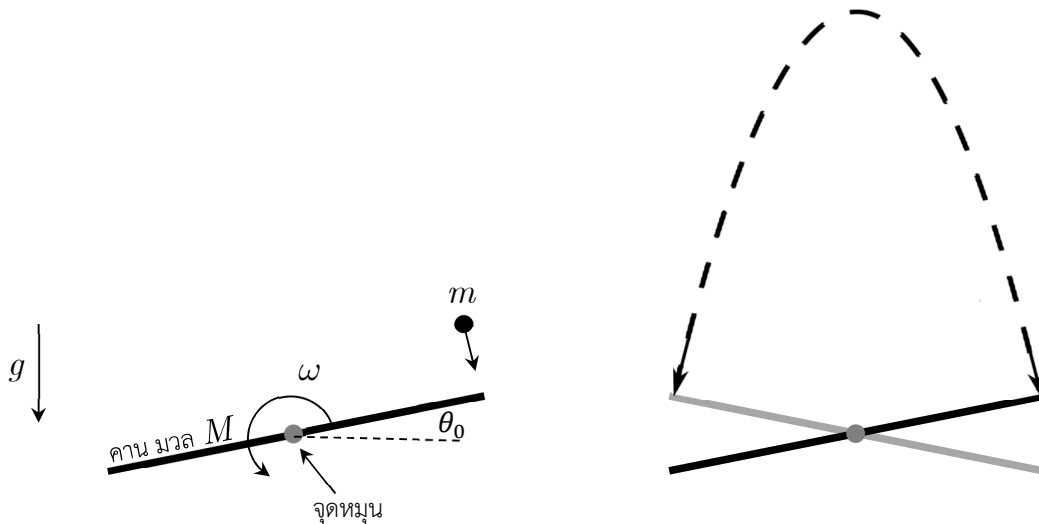
ข้อที่ 1

[10 คะแนน]

1.1 การเคลื่อนที่ซ้ำรอยเดิมของคานและมวล

[3 คะแนน]

คานมวล M ยาว L มีจุดหมุนที่สั้นมากที่กึ่งกลางคานพอดี เมื่อผลักแล้วปล่อยให้คานหมุน มันจะหมุนในระนาบแนวตั้งระนาบเดิมเท่านั้นโดยไม่หยุดและมีอัตราเร็วเชิงมุมคงตัว ขณะที่คานกำลังหมุนอยู่นั้น ขว้างมวล m ไปที่ปลายคานข้างหนึ่ง หลังจากมวล m กระแทบปลายคาน มันกระดอนขึ้นไปในอากาศแล้วไปตกกระทบกับปลายอีกข้างหนึ่งแล้วกระดอนกลับไปกลับมาระหว่างปลายทั้งสองข้าง เกิดการเคลื่อนที่ย้อนกลับไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่เดิม ซึ่งแสดงว่าไม่มีการสูญเสียพลังงาน หรือทุกการชนเป็นแบบยืดหยุ่น ให้ถือว่าช่วงเวลาที่มีมวล m กระแทบคานนั้นสั้นมาก



รูปที่ 1 ซ้าย: ขว้างมวล m เข้าหาปลายคานที่กำลังหมุนรอบจุดหมุน, ขวา: การเคลื่อนที่ซ้ำรอยเดิม

ขณะที่มวล m กำลังจะกระทบคานนั้น มวล m มีอัตราเร็ว v คานมีอัตราเร็วเชิงมุม ω และกำลังเอียงทำมุม θ_0 เทียบกับแนวระนาบ

a) จากการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของ m จงแสดงว่า $L = \frac{2v^2 \sin \theta_0}{g}$ [1.0 คะแนน]

b) เราสามารถแสดงได้ว่า $ML\omega = kmv$ จงหาค่า k ที่เป็นตัวเลข [1.1 คะแนน]

c) จงหาอัตราส่วนที่เป็นไปได้ของ $\frac{m}{M}$ ในรูปของ θ_0 เท่านั้น [0.9 คะแนน]

(ในกรณีที่หาค่า k จากข้อ b) ไม่ได้สามารถตอบในรูปของ k ได้)

1.2 การส่งผ่านความร้อนผ่านภาชนะทรงกระบอก

[4 คะแนน]

ปัจจุบันภาชนะเก็บน้ำแข็งแบบสุญญากาศกำลังเป็นที่นิยมอย่างแพร่หลายเนื่องจากสามารถทำให้คงสภาพความเป็นน้ำแข็งได้นาน หลักการง่ายๆของภาชนะแบบนี้ คือการสร้างภาชนะบรรจุเป็นผนังสองชั้น โดยให้ช่องว่างระหว่างผนังทั้งสองเป็นสุญญากาศ ทำให้การถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นเป็นแบบการแผ่รังสีเท่านั้น ในคำถามข้อนี้เราจะพิจารณาถึงพลังงานที่ไหลเข้าและออกจากน้ำแข็งเพื่อที่จะคำนวณว่าเราจะเก็บน้ำแข็งได้นานเท่าใด

เราจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาผนังที่ละชั้น โดยเริ่มจากผนังชั้นนอกของภาชนะแบบชั้นเดียวก่อน (ไม่มีผนังชั้นใน) ให้ E_1 เป็นปริมาณอัตราการแผ่รังสีต่อหน่วยพื้นที่จากผนังชั้นนอก จากกฎของ Stefan-Boltzmann เราจะเขียนได้ว่า

$$E_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$$

โดยที่

ε_1 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการแผ่รังสีของผนังชั้นนอก ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 (สำหรับพื้นผิวที่ดูดกลืนพลังงานได้ 100% จะมีค่า ε เท่ากับ 1 และพื้นผิวที่สะท้อน 100% จะมีค่า ε เท่ากับ 0)

σ คือ ค่าคงตัวของ Stefan-Boltzmann ซึ่งมีค่าเท่ากับ $5.670373 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

T_1 คือ อุณหภูมิของผนังชั้นนอก ในหน่วยเคลวิน (K)

ในกรณีที่เรากำหนดถึงผนังชั้นในแบบชั้นเดียว (ไม่มีผนังชั้นนอก) เราเขียนปริมาณอัตราการแผ่รังสีต่อหน่วยพื้นที่ E_2 จากผนังชั้นในได้

$$E_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$$

โดยที่

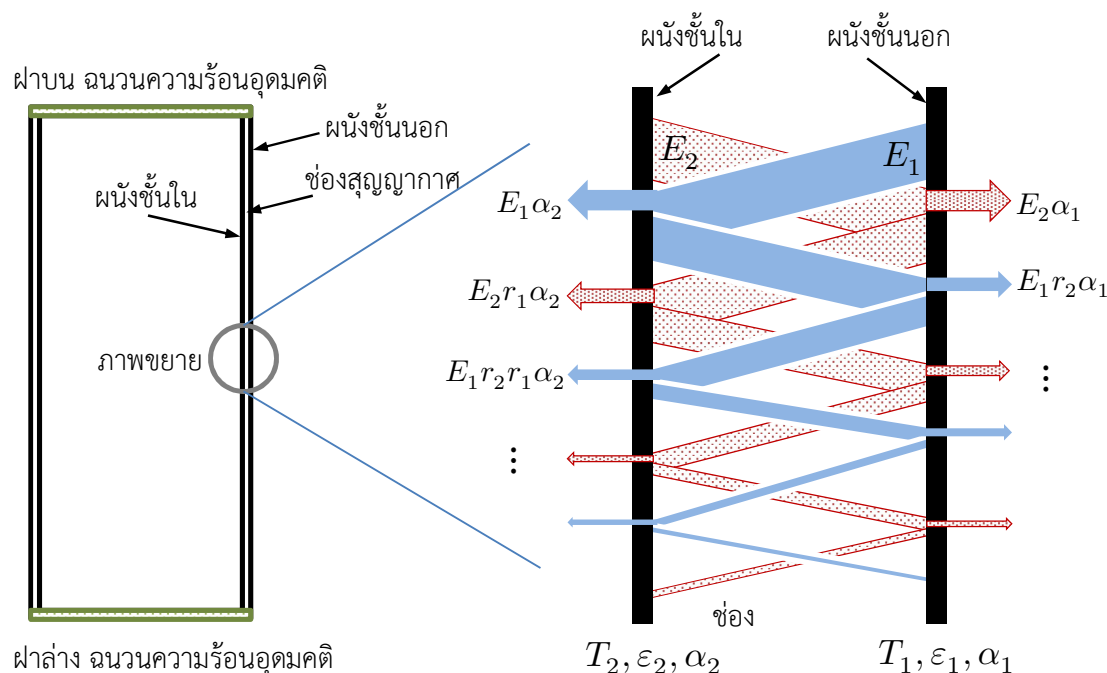
ε_2 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการแผ่รังสีของผนังชั้นใน ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

T_2 คือ อุณหภูมิของผนังชั้นใน ในหน่วยเคลวิน (K) ซึ่งในปัญหาข้อนี้เราจะสมมติว่าอุณหภูมิของผนังชั้นในจะเท่ากับของน้ำแข็งเสมอ

สำหรับภาชนะเก็บน้ำแข็งที่มีผนังสองชั้นที่อยู่ใกล้กัน นอกจากการแผ่รังสีของผนังทั้งสองดังที่ได้พิจารณาในข้างต้นแล้ว เราต้องพิจารณาการสะท้อนและการดูดกลืนรังสีของผนังทั้งสองด้วย เพื่อความง่ายของ

ปัญหา เราจะสมมติว่าภาชนะที่ใช้เป็นทรงกระบอกสองชั้น ที่ไม่มีการสูญเสียความร้อนที่ฝาและก้นของภาชนะดังรูปที่ 2 (ซ้าย) และผนังทั้งสองชั้นไม่ห่างกันมากจนสามารถประมาณได้ว่าพื้นที่ผิวของผนังทั้งสองมีค่าเท่ากัน

เมื่อเราวิเคราะห์การแผ่รังสี การสะท้อน และการดูดกลืนรังสีของผนังทั้งสอง จะพบว่ารังสีความร้อนที่แผ่ออกมาจากผนังชั้นนอกจะไปตกกระทบบนผนังชั้นใน ซึ่งพลังงานบางส่วนจะถูกดูดกลืนไว้โดยผนังชั้นใน และอีกส่วนหนึ่งจะถูกสะท้อนกลับไปยังผนังชั้นนอก ซึ่งจะเกิดการดูดกลืนและสะท้อนในรูปแบบเดียวกันกลับไปกลับมา ระหว่างผนังทั้งสองชั้นดังรูปที่ 2 (ขวา) ในขณะเดียวกันพลังงานที่เกิดจากการแผ่รังสีจากผนังชั้นในก็มีการดูดกลืนและการสะท้อนแบบเดียวกัน



รูปที่ 2

กำหนดให้

α_1, α_2 คือ สัมประสิทธิ์การดูดกลืนรังสีของผนังชั้นนอกและชั้นในตามลำดับ

$r_1 = 1 - \alpha_1$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนรังสีของผนังชั้นนอก

$r_2 = 1 - \alpha_2$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนรังสีของผนังชั้นใน



- a) จากรูปที่ 2 จงแสดงว่าอัตราการดูดกลืนรังสีความร้อน (พลังงานที่ไหลเข้า) ทั้งหมดต่อหน่วยพื้นที่ ที่ผนังชั้นในคือ

$$E_{\text{absorb on 2}} = \frac{E_1 \alpha_2 + E_2 \alpha_1 - E_2 \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \quad [1.5 \text{ คะแนน}]$$

ในการคิดบางวิธี นักเรียนอาจต้องใช้สูตร $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ สำหรับ $|a| < 1$

นอกจากพลังงานที่ไหลเข้าในรูปของการดูดกลืนรังสีแล้ว ยังมีพลังงานบางส่วนที่ไหลออกเนื่องมาจากการแผ่รังสีของผนังชั้นใน อัตราการละลายของน้ำแข็งจะขึ้นอยู่กับผลต่างของปริมาณทั้งสอง

สำหรับการคำนวณหลังจากนี้ให้ถือว่า ค่าของสัมประสิทธิ์ของการแผ่รังสี (ε) เท่ากับสัมประสิทธิ์การดูดกลืนรังสี (α) สำหรับพื้นผิวนั้น ๆ

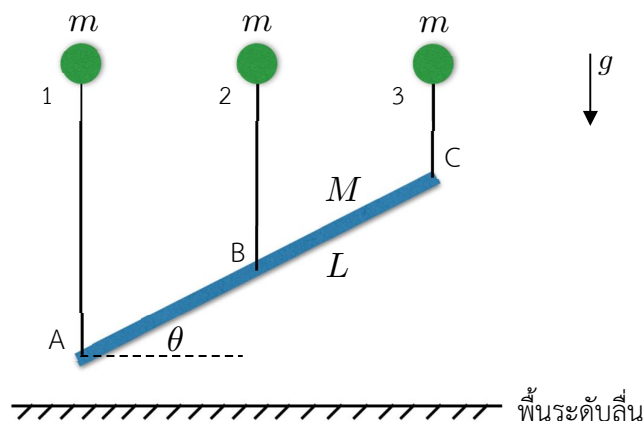
- b) จงหาอัตราความร้อนสุทธิต่อหน่วยพื้นที่ ที่ส่งผ่านผนังชั้นในทั้งหมด

ให้ตอบในรูปของ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma, T_1$ และ T_2 [1.0 คะแนน]

- c) สมมติว่าภาชนะรูปทรงกระบอกสูง 30 cm และมีรัศมี 3.0 cm บรรจุน้ำแข็งอุณหภูมิ 0°C มวล 500 g และ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.08$ อุณหภูมิภายนอกคือ 25°C ค่าความร้อนแฝงของการหลอมเหลวของน้ำคือ 336 kJ/kg จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไรน้ำแข็งจึงละลายหมด [1.5 คะแนน]

1.3 การตกของมวลกับท่อนไม้

[3 คะแนน]



รูปที่ 3

ระบบประกอบด้วยท่อนไม้สม่ำเสมอมวล M ยาว L เอียงทำมุม θ กับแนวระดับ ปลายทั้งสองและจุดศูนย์กลางมวลของท่อนไม้ผูกกับก้อนมวล m 3 ก้อน ด้วยเชือกเบา โดยที่มวลทั้ง 3 ก้อนเรียงอยู่ในแนวระดับเดียวกัน และ $M \ll m$ ทั้งระบบ(ท่อนไม้และก้อนมวล)ถูกจับไว้โดยให้เชือกไม่ตึงและไม่หย่อน ดังรูปที่ 3 หลังจากนั้นปล่อยให้ระบบตกลงมาอย่างอิสระจากตำแหน่งที่สูงจากพื้นเพียงเล็กน้อย

- a) มวลแต่ละก้อนมีขนาดความเร่งมากกว่า หรือเท่ากับ หรือน้อยกว่า g [0.3 คะแนน]

ในคำถามสามข้อต่อไป นี้ ให้พิจารณาขณะที่ปลาย A แตะสัมผัสพื้นพอดีโดยไม่กระดอนขึ้นและพื้นลื่น เราจะหาเงื่อนไขที่ทำให้เชือกทุกเส้นหย่อน โดยพิจารณาตามขั้นตอนดังนี้

- b) ถ้าไม่มีมวลทั้งสามก้อนผูกอยู่ จุด A, B และ C จะมีความเร่งในแนวดิ่งเป็นเท่าใด ตอบในรูปของ g และ θ [1.4 คะแนน]

- c) ถ้ามีมวลทั้งสามก้อนผูกอยู่ จงหาช่วงของมุม θ (เป็นตัวเลข) ที่ทำให้เชือกหย่อนทั้งสามเส้น [0.3 คะแนน]

- d) ในกรณีที่ θ มีค่าอยู่นอกช่วงในข้อ c) จงหาความเร่งของมวล m แต่ละก้อน [1.0 คะแนน]

ข้อที่ 2

[10 คะแนน]

การกำหนดค่ามวลมาตรฐานด้วยตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้า (Watt Balance)

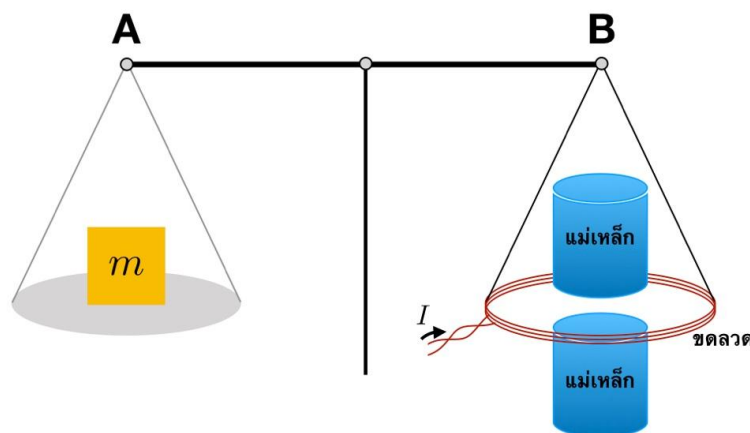
หน่วยกิโลกรัม ซึ่งเป็น 1 ใน 7 ของหน่วยมาตรฐานในระบบ SI นั้น ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1889 เป็นต้นมา ได้ถูกนิยามด้วย มวลต้นแบบสากล (International Prototype Kilogram หรือ IPK) ซึ่งเป็นโลหะผสมรูปทรงกระบอกทำจาก แพลตินัม 90% และ อิริเดียม 10% ถ้าหากเรามีมวลที่ไม่ทราบค่า เราสามารถนำไปเทียบกับมวล IPK (หรือสำเนาของมวล IPK ที่ทำขึ้น และแจกจ่ายไปยังประเทศต่าง ๆ) ได้โดยตรง ถ้าทำการทดลองแล้วพบว่ามวลทั้งสองมีค่าเท่ากัน เราสามารถสรุปได้ว่า มวลที่เราไม่ทราบค่านั้น มีขนาด 1 กิโลกรัมพอดี

อย่างไรก็ดี ในช่วง 20 ปีที่ผ่านมา นักฟิสิกส์พบว่า มวล IPK และสำเนาของ IPK ที่ประเทศต่าง ๆ นั้น มีมวลที่ไม่เท่ากัน เราสันนิษฐานว่า น่าจะเกิดจากการปนเปื้อนของสารในอากาศที่เกาะที่ผิวของก้อนมวล

เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงปัญหาความไม่แน่นอนของมวล IPK นักฟิสิกส์จึงมีแนวคิดที่จะนิยามหน่วยกิโลกรัมด้วยวิธีอื่น คำถามในข้อนี้จะเป็นการแนะนำให้นักเรียนทราบถึงหลักการทางฟิสิกส์ของการนิยามหน่วยกิโลกรัมโดยใช้การวัดทางไฟฟ้าแทน

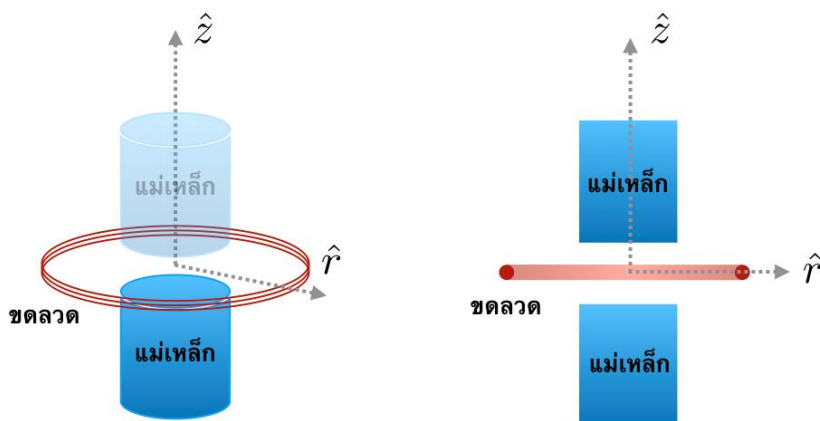
ตอน A: การทำงานของตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้า

ตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้า หรือวัตต์บาลานซ์ (watt balance) เป็นตาชั่งที่ใช้แรงแม่เหล็กไฟฟ้าแทนน้ำหนักของมวลมาตรฐานในการที่จะทำให้ตาชั่งสมดุล ดังที่แสดงในรูปที่ (1) แขนฝั่ง A เป็นตาชั่งฝั่งที่เอาไว้วางมวลที่เราไม่ทราบค่า ส่วนแขนฝั่ง B เป็นฝั่งที่เราจะสร้างแรงด้วยการให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่านขดลวดในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กอยู่ จุด A และ B อยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะเท่ากัน และมวลของถาดฝั่ง A เท่ากับมวลของระบบขดลวดฝั่ง B



รูปที่ (1) ตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้า

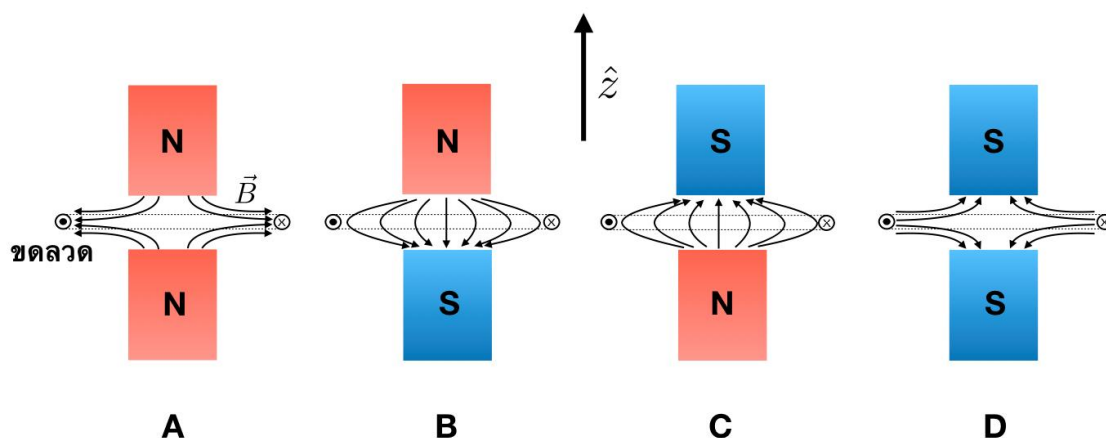
แกนตาขึงฝึง B ประกอบด้วยขดลวดรัศมี r จำนวน N รอบ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะใช้ระบบพิกัดแบบทรงกระบอก โดยให้จุดศูนย์กลางของขดลวดเป็นจุดกำเนิด ทิศ $+\hat{z}$ ชี้ขึ้นจากจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับระนาบของขดลวด ส่วนทิศ $\hat{r}$ ชี้พุ่งออกจากจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกน z ดังแสดงในรูปที่ (2)



รูปที่ (2) ระบบของขดลวดและคู่แม่เหล็ก

เพื่อที่จะสร้างแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำต่อขดลวดเมื่อเราผ่านกระแสให้ไหลผ่านขดลวด เราวางขดลวดไว้ระหว่างแม่เหล็กถาวรสองแท่ง

คำถาม 2.1 รูปที่ (3) แสดงถึงขั้วแม่เหล็กที่เป็นไปได้ทั้งสี่แบบ ในแต่ละแบบเราได้แสดงสนามแม่เหล็กระหว่างขั้วทั้งสองและวงขดลวดที่มีทิศทางของกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน ให้นักเรียนเลือกขั้วแม่เหล็กที่ทำให้เกิดแรงแม่เหล็กไฟฟ้ากระทำต่อขดลวดในทิศ $-\hat{z}$ [1.0 คะแนน]



รูปที่ (3) สำหรับคำถาม 2.1

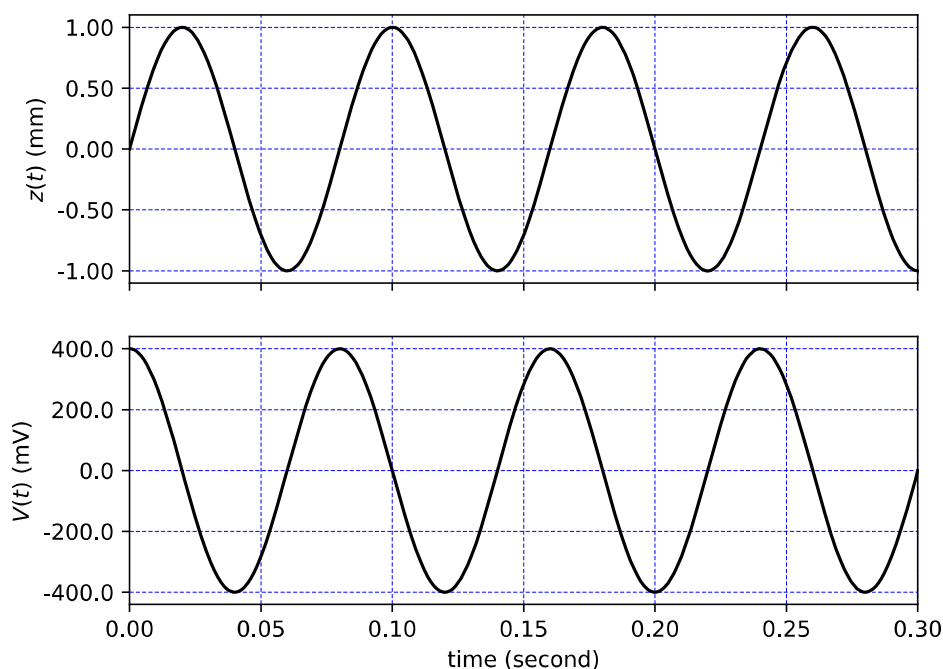
ให้สมมติว่าสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่งของขดลวดนั้นเขียนได้ในรูป

$$\vec{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$$

ให้ประมาณว่าทั้ง B_r และ B_z เป็นค่าคงที่

คำถาม 2.2 เพื่อความแม่นยำ เราจะใช้ตัวขดลวดเองเป็นตัววัดความเข้มสนามแม่เหล็ก จงหาขนาดของอีเอ็มเอฟ (emf หรือ แรงเคลื่อนไฟฟ้า) V ที่เกิดขึ้นในขดลวดขณะที่ขดลวดกำลังเคลื่อนที่ขึ้นในทิศ $+\hat{z}$ ด้วยอัตราเร็ว u [1.0 คะแนน]

คำถาม 2.3 สมมติว่าขดลวดเคลื่อนที่ขึ้นลงในแนวแกน z แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยข้อมูลของตำแหน่งของขดลวด $z(t)$ และอีเอ็มเอฟในขดลวด $V(t)$ ที่เราวัดได้เป็นไปตามข้อมูลในรูปที่ (4) จงหาว่าความเข้มสนามแม่เหล็ก B_r มีค่าเท่าใด กำหนดให้ รัศมีของลวด $r = 10 \text{ cm}$ และจำนวนรอบของขดลวด $N = 100$ รอบ [1.5 คะแนน]



รูปที่ (4) ข้อมูลสำหรับคำถาม 2.3

คำถาม 2.4 หลังจากที่เราทราบความเข้มสนามแม่เหล็กแล้ว เราสามารถคำนวณหาค่ามวลที่เราต้องการจะวัดได้โดยวัดว่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านขดลวดที่ทำให้ตาชั่งสมดุล

สมมติว่า ค่ากระแสไฟฟ้าที่ทำให้ตาชั่งสมดุลคือ 1.928 A จงคำนวณขนาดของมวล โดยกำหนดให้ ค่าอัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก $g = 9.8122567 \text{ m/s}^2$ และใช้ข้อมูลจากข้อ 2.3 [1.0 คะแนน]

ตอน B: การนิยามมวลด้วยการวัดทางไฟฟ้า

วิธีที่แม่นยำกว่าในการวัดมวล คือการหลีกเลี่ยงการใช้ข้อมูลของรัศมีของขดลวดและความเข้มของสนามแม่เหล็กในการวัดเนื่องจากมีความแม่นยำน้อย แต่คำนวณหาค่ามวลโดยตรงจากปริมาณทางฟิสิกส์ 4 ปริมาณที่เราวัด นั่นคือ

- อัตราเร็วของขดลวด u
- อีเอ็มเอฟในขดลวด V
- กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านขดลวด I และ
- ค่าอัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g

คำถาม 2.5 จงแสดงว่า $m = \frac{IV}{ug}$

[1.0 คะแนน]

ในปัจจุบัน นักฟิสิกส์สามารถวัดปริมาณ u , V , I และ g ได้อย่างแม่นยำสูงมาก ทำให้ความแม่นยำของมวล m ที่วัดโดยใช้ตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้านั้น มีความแม่นยำมากตามไปด้วย ต่อไปเราจะศึกษาฟิสิกส์ของการวัดปริมาณเหล่านี้

เราสามารถวัดค่าความเร่ง g อย่างแม่นยำด้วยเครื่องมือที่เรียกว่า atom interferometer ส่วนอัตราเร็ว u นั้น เราวัดได้โดยใช้เทคนิคการแทรกสอดของแสง เราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดของการวัดทั้งสองปริมาณนี้

เราพิจารณาเฉพาะการวัดปริมาณที่เหลือสองปริมาณ คือ ค่าอีเอ็มเอฟ V และ กระแสไฟฟ้า I

ในการวัดค่าอีเอ็มเอฟนั้น ในปัจจุบันเราจะวัดเทียบกับค่าความต่างศักย์มาตรฐานที่เราวัดได้จากปรากฏการณ์ Josephson ซึ่งสามารถเปลี่ยนจากการวัดค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า เป็นการวัดความถี่ของสัญญาณไฟฟ้าแทน ทั้งนี้เนื่องจากเราสามารถวัดความถี่ของสัญญาณไฟฟ้าเทียบกับนาฬิกาอะตอมได้โดยตรง ทำให้การวัดค่าความต่างศักย์ด้วยวิธีนี้ มีความแม่นยำที่สูงมาก

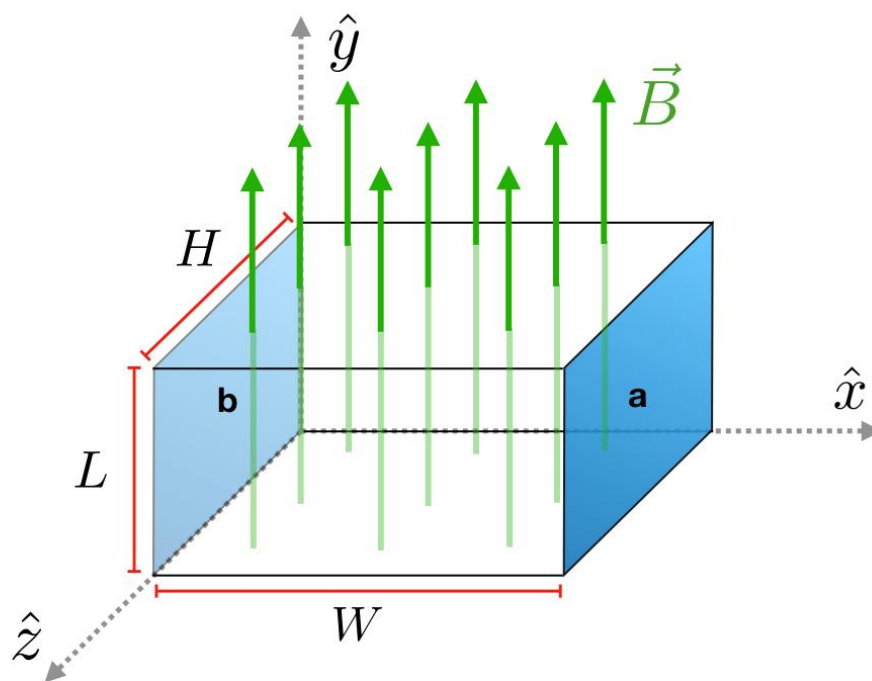
คำถาม 2.6 โดยทั่วไป ค่าความต่างศักย์จากปรากฏการณ์ Josephson นั้นเขียนได้อยู่ในรูป

$V = Af^a h^b e^c$ โดยที่ A เป็นค่าคงที่ของการแปรผันที่ไม่มีมิติ f เป็นความถี่ของสัญญาณไฟฟ้าที่วัดได้ $h = 6.626069 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$ เป็นค่าคงที่ของพลังค์ และ e เป็นขนาดของประจุไฟฟ้าของอิเล็กตรอน ให้ใช้การวิเคราะห์เชิงมิติ (dimensional analysis) หว่าเลขชี้กำลัง a , b และ c มีค่าเท่าใด

[1.0 คะแนน]

สำหรับการวัดค่ากระแสไฟฟ้านั้น เราจะให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่านตัวต้านทานมาตรฐาน และวัดค่าความต่างศักย์คร่อมตัวต้านทานด้วยปรากฏการณ์ Josephson (อย่างที่แสดงในคำถามที่ 2.6) จากนั้นเราจะคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าโดยกฎของโอห์ม

ตัวต้านทานมาตรฐานนั้น ในปัจจุบันเรานิยามด้วยค่าความต้านทานที่วัดได้จากปรากฏการณ์ฮอลล์ (Hall Effect)



รูปที่ (5) ตัวนำไฟฟ้าสำหรับปรากฏการณ์ฮอลล์ ที่มีสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ พุ่งผ่านในทิศ $\hat{y}$

ให้พิจารณาตัวนำไฟฟ้าทรงสี่เหลี่ยมดังที่แสดงใน รูปที่ (5) โดยมีความยาว W, L และ H ในแกน $\hat{x}, \hat{y}$ และ $\hat{z}$ ตามลำดับ ให้ความหนาแน่นของอิเล็กตรอน (จำนวนอิเล็กตรอนอิสระต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร) เป็น n

ปรากฏการณ์ฮอลล์ คือการสังเกตว่า เมื่อให้ความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างผิว a และ b มีค่าเท่ากับ $V_a - V_b = V_x > 0$ พร้อมทั้งให้สนามแม่เหล็กขนาด B ในทิศ $+\hat{y}$ เราจะพบว่า มีกระแสไฟฟ้า I_z ไหลในตัวนำไฟฟ้าในทิศ $-\hat{z}$



เราสามารถนิยาม ความต้านทานฮอลล์ (Hall Resistance) ได้ด้วย $R = \frac{V_x}{I_z}$ ซึ่งสำหรับตัวนำไฟฟ้าในรูปที่ (5) ที่มีสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ พุ่งผ่านตัวนำในทิศ $\hat{y}$ เราสามารถใช้ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าคำนวณได้ว่า

$$R = \frac{B}{enL}$$

คำถาม 2.7 หากเราวิเคราะห์ปรากฏการณ์ฮอลล์โดยใช้ทฤษฎีควอนตัม เราพบว่า ฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านตัวนำนั้น สามารถเขียนได้ในรูป $\Phi_B = k \frac{h}{e}$ เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็ม [2.0 คะแนน]
(a) จงแสดงให้เห็นว่าค่าความต้านทานฮอลล์ สามารถเขียนในรูปของ $R \propto \frac{h}{e^2}$ ได้
(b) จงแสดงให้เห็นว่าค่าคงที่ของการแปรผันของความสัมพันธ์ในข้อ (a) เป็นเลขที่ไม่มีมิติ

การที่ R นั้นขึ้นกับปริมาณมูลฐานอย่าง e และ h ทำให้ค่าความต้านทาน R นั้น มีความคลาดเคลื่อนที่น้อยมาก การวัดกระแสไฟฟ้าที่มีความแม่นยำ เกิดการจากวัดความต่างศักย์ไฟฟ้า (ด้วยปรากฏการณ์ Josephson) คร่อม R

กล่าวโดยสรุปแล้ว การหามวล m ด้วยตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้านั้น เราวัด V ด้วยการวัดความถี่ f_1 (จากปรากฏการณ์ Josephson) และวัด I ด้วยการวัดความต่างศักย์ V' คร่อมตัวต้านทานมาตรฐาน R โดยที่ V' นั้นจะได้อจากการวัดความถี่ f_2 ด้วยปรากฏการณ์ Josephson อีกครั้งหนึ่งนั่นเอง

คำถาม 2.8 จงแสดงให้เห็นว่า $m \propto \frac{f_1 f_2 h}{ug}$ (นั่นคือ m สามารถเขียนในรูปที่ขึ้นกับค่าคงที่ของพลังค์ h ได้) [1.0 คะแนน]

การที่มวล m นั้นขึ้นกับปริมาณที่เราสามารถวัดได้อย่างแม่นยำ เราจึงมีแนวคิดที่จะใช้ตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้าในการนิยามหน่วยกิโลกรัมแทนที่มวลต้นแบบ IPK เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาความไม่สอดคล้องกันระหว่างมวล IPK และสำเนาตัวอื่น ๆ



คำถาม 2.9 ในปัจจุบัน ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของมวล IPK อยู่ที่ประมาณ $\frac{\delta m}{m} \sim 5 \times 10^{-8}$ จงหาว่า การวัดมวลด้วยการใช้ตาชั่งแม่เหล็กไฟฟ้า จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\frac{\delta m}{m}$ เป็นเท่าใด โดยสมมติว่า $m = \frac{f_1 f_2 h}{gu}$ และใช้ตารางด้านล่างสำหรับค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาณต่าง ๆ [0.5 คะแนน]

ปริมาณ	ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์
h	1.2×10^{-8}
e	6.1×10^{-9}
g	4.4×10^{-9}
u	1.7×10^{-9}
f_1 และ f_2	$< 1.0 \times 10^{-15}$

ตารางแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของปริมาณต่าง ๆ
อ้างอิงจาก <http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4953825>

ข้อที่ 3

[10 คะแนน]

การยกตัวด้วยเสียง

คลื่นเสียงเป็นปรากฏการณ์ถ่ายทอดพลังงานผ่านตัวกลาง ไม่เพียงแต่พลังงานเท่านั้นที่ถูกถ่ายทอดไปด้วยเสียง โมเมนตัมก็ถูกถ่ายทอดไปเช่นเดียวกัน เมื่อคลื่นเสียงชนกับวัตถุในตัวกลางจะเกิดการสะท้อนและหักเหทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของเสียง อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมนี้จะสมมูลกับแรงที่คลื่นเสียงทำต่อวัตถุ

คลื่นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเสียง

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับการถ่ายทอดพลังงานและโมเมนตัมเสียง ให้พิจารณาว่าอนุภาคตัวกลางเสียงมีการเคลื่อนที่แบบสัน ปริมาณที่มีการเปลี่ยนแปลงแบบเดียวกันกับการสั่นได้แก่ ความเร็วของอนุภาคตัวกลาง ความดันของอากาศในตัวกลางและความหนาแน่นของอนุภาคในตัวกลาง โดยเราจะสมมติว่าเป็นฟังก์ชันดังนี้

$$v = v_m \sin(kx - \omega t)$$

$$P = P_a + P_m \sin(kx - \omega t + \phi_P)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_m \sin(kx - \omega t + \phi_\rho)$$

เมื่อ v เป็นคลื่นแสดงความเร็วของอนุภาคตัวกลางที่ตำแหน่ง x และเวลา t

P เป็นคลื่นแสดงความดันของตัวกลางที่ตำแหน่ง x และเวลา t

ρ เป็นคลื่นแสดงความหนาแน่นของตัวกลางที่ตำแหน่ง x และเวลา t

v_m เป็นแอมพลิจูดของคลื่นความเร็ว

P_m เป็นแอมพลิจูดของคลื่นความดัน

P_a เป็นความดันบรรยากาศขณะไม่มีคลื่น

ρ_m เป็นแอมพลิจูดของคลื่นความหนาแน่น

ρ_0 เป็นความหนาแน่นของอากาศขณะไม่มีคลื่น

k, ω เป็นเลขคลื่นและความถี่เชิงมุมของคลื่นตามลำดับ

ϕ_P เป็นความต่างเฟสของคลื่นความดันกับเฟสของคลื่นความเร็ว

ϕ_ρ เป็นความต่างเฟสของคลื่นความหนาแน่นกับเฟสของคลื่นความเร็ว

และให้ c เป็นอัตราเร็วเสียงในอากาศ

ตอน A: ความสัมพันธ์ของคลื่นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเสียง

เราสามารถใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันหาความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นความดันและคลื่นความเร็ว เมื่อพิจารณาผลต่างของความดันที่มีต่อความเร่งของลําอากาศขนาดเล็ก จะพบว่า

$$\frac{d}{dx} P \approx -\rho_0 \frac{d}{dt} v \quad (1)$$

ลําอากาศแต่ละบริเวณเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่แตกต่าง ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น ดังสมการ

$$\frac{d}{dt} \rho \approx -\rho_0 \frac{d}{dx} v \quad (2)$$

(ดูที่มาของสมการทั้งสองนี้ได้ในภาคผนวกหน้าสุดท้ายของข้อสอบ)

คำถาม 3.1 จงใช้สมการ (1) หาความต่างเฟส ϕ_P และอัตราส่วนระหว่างแอมพลิจูด P_m และ v_m ในรูปของความหนาแน่นของตัวกลาง ρ_0 และอัตราเร็วเสียง c [1.0 คะแนน]

คำถาม 3.2 จากสมการ (2) จงหาความต่างเฟส ϕ_ρ และอัตราส่วนระหว่างแอมพลิจูด ρ_m และ v_m ในรูปของความหนาแน่นของตัวกลาง ρ_0 และอัตราเร็วเสียง c [1.0 คะแนน]

คำถาม 3.3 จงหาอัตราส่วนแอมพลิจูดคลื่นความดันต่อแอมพลิจูดของคลื่นความหนาแน่น $\frac{P_m}{\rho_m}$ [0.2 คะแนน]

คำถาม 3.4 เมื่อมีคลื่นเสียงผ่านอากาศที่มีความดัน P_a และความหนาแน่น ρ_0 ตัวกลางอากาศจะเกิดการเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นขึ้นอย่างรวดเร็ว เราจึงประมาณการเปลี่ยนแปลงนี้เป็นแบบ adiabatic และได้ความสัมพันธ์ $P = K\rho^\gamma$ [1.8 คะแนน]

(a) จงหาค่า K ของตัวกลางดังกล่าว โดยให้ตอบในรูปของ γ , P_a และ ρ_0

(b) จงหาอัตราส่วน $\frac{P_m}{\rho_m}$ ในรูปของ γ , P_a และ ρ_0

(c) หาค่าอัตราเร็วเสียงในตัวกลางดังกล่าวด้วย โดยให้ตอบในรูปของ γ , P_a และ ρ_0

แนะ: ใช้การประมาณ $(1+x)^n \approx 1+nx$ เมื่อ $x \ll 1$



ตอน B: พลังงานและโมเมนตัมของเสียง

ข้อมูล: ค่าเฉลี่ยเชิงเวลา (Time average) ของฟังก์ชัน $f(t)$ ที่มีคาบ T คือ $\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} f(t) dt$

$$\text{โดยที่ } \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \cos^2(\omega t + \delta) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \sin^2(\omega t + \delta) dt = \frac{1}{2}$$

คำถาม 3.5 จงหาค่าเฉลี่ยเชิงเวลาของความหนาแน่นพลังงานจลน์ (พลังงานจลน์ต่อหน่วยปริมาตร) ของอนุภาค

ตัวกลางของคลื่นเสียง ให้ตอบในรูปของ ρ_0 และ v_m

[1.0 คะแนน]

คำถาม 3.6

(a) จงหาค่าเฉลี่ยเชิงเวลาของความหนาแน่นโมเมนตัม (โมเมนตัมต่อหน่วยปริมาตร) ของอนุภาคตัวกลางของคลื่นเสียงในแนวการเคลื่อนที่ของคลื่น ให้ตอบในรูปของ ρ_0 , c และ v_m

[1.5 คะแนน]

(b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเชิงเวลาของความหนาแน่นโมเมนตัมและค่าเฉลี่ยเชิงเวลาของความหนาแน่นพลังงานจลน์ ในรูปของอัตราเร็วเสียง c

[0.2 คะแนน]

ตอน C: คลื่นเสียงและแรงกระทำต่อวัตถุ

ตอนนี้จะทำการคำนวณการเปลี่ยนแปลงที่ละเอียดยิ่งขึ้น โดยปรับสมการที่ (1) จาก $\frac{d}{dx} P \approx -\rho_0 \frac{d}{dt} v$ ให้ครอบคลุมการเปลี่ยนแปลงอันดับที่สองของความดัน นั่นคือ

$$\frac{d}{dx} P = -\rho \frac{d}{dt} v = -(\rho_0 + \rho_m \sin(kx - \omega t + \phi_\rho)) \frac{d}{dt} (v_m \sin(kx - \omega t)) \quad (3)$$

แล้วจะได้ความดันแจกแจงอยู่ในรูป

$$P = P_a + P_m \sin(kx - \omega t + \phi_P) + B \sin^2(kx - \omega t + \phi_P) \quad (4)$$

เมื่อ B เป็นค่าคงตัว

คำถาม 3.7 จงหาค่า B พร้อมทั้งหาค่าเฉลี่ยเชิงเวลาของความดันในรูปของ P_a , P_m , ρ_0 และ c

[1.3 คะแนน]



คำถาม 3.8 เมื่อคลื่นระนาบที่มีแอมพลิจูดของความดัน P_0 ถูกปล่อยขึ้นในแนวตั้งไปตกกระทบตั้งฉากกับแผ่นกั้นมวล m พื้นที่หน้าตัด a และสะท้อนกลับลงมาเกิดการซ้อนทับกันเป็นคลื่นนิ่ง จงหาแรงยกที่คลื่นกระทำต่อแผ่นกั้นนี้ โดยให้ตอบในรูปของ P_0 , ρ_0 , a และ c [1.0 คะแนน]

คำถาม 3.9 เสียงที่มีความดัง 120 dB เดินทางในอากาศที่มีความหนาแน่น 1.2 kg/m^3 ด้วยอัตราเร็ว 340 m/s ตกกระทบพื้นผิวสะท้อน จะเกิดแรงผลักดันกึ่งนิวตันต่อตารางเมตร กำหนดให้ เสียงที่มีความดังต่ำสุดที่เราได้ยินในอากาศมีความดัน $20 \text{ }\mu\text{Pa}$ [1.0 คะแนน]

แนะ: ความเข้มเสียงแปรผันตามกำลังสองของแอมพลิจูดคลื่นความดัน

***** จบข้อ 3 *****

ภาคผนวก...



ภาคผนวก: ที่มาของสมการ (1) และ (2)

เราสามารถใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันหาความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นความดันและคลื่นความเร็ว แรงกระทำที่มีผลต่อความเร่งของลำอากาศ เกิดจากผลต่างของความดันทั้งสองด้านของลำอากาศหนาน้อย ๆ Δx มีพื้นที่หน้าตัด A และมีมวล $\rho A \Delta x$ ดังนี้

$$(P(x) - P(x + \Delta x))A = \rho A \Delta x \frac{d}{dt} v$$

$$\frac{d}{dx} P = \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = -\rho \frac{d}{dt} v$$

ซึ่งหากเราประมาณการเปลี่ยนความดันมีค่าน้อย $\rho_m \ll \rho_0$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} P \approx -\rho_0 \frac{d}{dt} v$$

เราสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นความเร็วกับคลื่นความหนาแน่นได้ โดยพิจารณาปริมาตรของลำอากาศหนา Δx ตามแนวการเคลื่อนที่ของคลื่น และมีพื้นที่หน้าตัด A การเคลื่อนที่ของหน้าตัดทั้งสองด้านที่แตกต่างกันทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร $V = A \Delta x$ และจึงทำให้ความหนาแน่น ρ เปลี่ยนแปลงด้วย

เนื่องจากมวลของลำอากาศมีค่าคงตัวดังนั้น

$$\frac{d}{dt} (\rho V) = V \frac{d}{dt} \rho + \rho \frac{d}{dt} V = 0$$

ปริมาตรที่เปลี่ยนแปลงเทียบเวลา หาได้จาก

$$dV = A[v(x + \Delta x) - v(x)]dt$$

$$\frac{d}{dt} V = A[v(x + \Delta x) - v(x)] = A \Delta x \frac{d}{dx} v = V \frac{d}{dx} v$$

นำไปใส่ในสมการอนุรักษ์มวลของลำอากาศ จะได้ว่า $V \frac{d}{dt} \rho + \rho V \frac{d}{dx} v = 0$ หรือ

$$\frac{d}{dt} \rho = -\rho \frac{d}{dx} v$$

ซึ่งหากเราประมาณการเปลี่ยนความดันมีค่าน้อย $\rho_m \ll \rho_0$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \rho \approx -\rho_0 \frac{d}{dx} v$$