



คุณสมบัติของข้าว

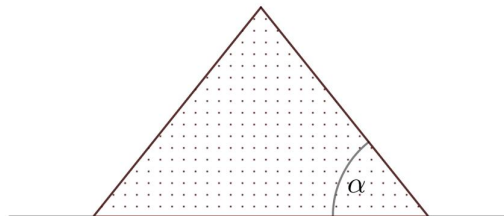
มุมทรงตัว และ ความหนาแน่นการอัด

[20 คะแนน]

บทนำ

ในธรรมชาติเราจะสังเกตเห็นได้ว่า สิ่งของที่มีลักษณะเป็นเม็ด (grain) เช่น ข้าว แป้ง ทราย เมื่อเราค่อย ๆ ก่อกอง เราจะได้กองที่มีลักษณะเป็นกองที่มีความลาดชันทรงตัว เราเรียกมุมนี้ว่า **มุมทรงตัว (angle of repose)** α (รูปที่ 1) โดยหากเรากองเม็ดสูงขึ้นเรื่อย ๆ จนมีความลาดชันขนาดหนึ่ง กองเม็ดจะเริ่มทลายลงมา (Avalanche) เราเรียกมุมของระนาบเม็ด ณ ตอนจะเริ่มทลายนี้ว่า **มุมทรงตัวแรก (upper angle of repose)** α_1 จากนั้นกองเม็ดก็จะทลายลงมาจนหยุด เราเรียกมุมของระนาบเม็ดตอนที่หยุดทลายแล้วว่า **มุมทรงตัวที่สอง (lower angle of repose)** α_2 ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่ามุมทรงตัวแรก

ในการทดลองนี้เราต้องการที่จะวัดมุมทรงตัวทั้งสองของข้าว ด้วยวิธีการที่ต่างกันสามวิธี (การทดลองตอนที่ 1 ถึง 3) นอกจากนี้แล้วเราได้วัดค่าความหนาแน่นการอัด (packing factor) ของข้าวด้วย (การทดลองตอนที่ 4)



รูปที่ 1 กองข้าว มีมุมทรงตัว α

คำเตือน

นักเรียนควรทำการทดลองตอนที่ 1 – 3 ให้เสร็จก่อน และทำตอนที่ 4 เป็นการทดลองสุดท้าย เนื่องจากข้าวที่ใช้ในการทดลองตอนที่ 4 แล้วจะไม่สามารถนำมาใช้ได้อีกและนักเรียนไม่สามารถขอข้าวเพิ่มได้

ตอนที่ 1 การวัดมุมทรงตัวที่สอง จากการกองข้าวโดยตรง

[3.5 คะแนน]

วิธีที่ง่ายที่สุดสำหรับการวัดมุมทรงตัวที่สอง α_2 คือการวัดมุมโดยตรงจากกองข้าว ซึ่งทำได้โดยการนำข้าวมาก่อให้เป็นกองและวัดมุมทรงตัวโดยตรง

คำสั่ง

ให้นักเรียนทำการทดลองวัดมุมทรงตัวที่สอง (α_2) ของข้าวแบบการวัดโดยตรงจากกองข้าวที่มีลักษณะแบบรูปที่ 1 นักเรียนอาจใช้มือโกยข้าวขึ้นมาเรื่อย ๆ จนได้กองข้าว

ให้นักเรียนเขียนอธิบายและวาดรูปแสดงวิธีการใช้อุปกรณ์เพื่อวัดค่าต่าง ๆ ให้ชัดเจน เพียงพอที่กรรมการจะเข้าใจได้ ให้งานผลคำนวณพร้อมค่าคลาดเคลื่อนในหน่วยของศ

สำหรับตอนที่ 1 นี้ ไม่ให้ ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ในการวัดมุมโดยตรง

อุปกรณ์สำหรับตอนที่ 1

1. ข้าว
2. ไม้บรรทัด จำนวน 2 อัน
3. ที่หนีบกระดาษ จำนวน 2 อัน สำหรับใช้ยึดไม้บรรทัดอันหนึ่งให้ตั้งอยู่ในแนวตั้งได้
4. ฝากล่องกระดาษ A4 (ความหนากระดาษฝากล่อง 0.2 cm)

คำแนะนำ

นักเรียนควรกองข้าวในฝากล่องกระดาษ A4 ที่มีให้ เพื่อความสะดวกในการจัดเก็บข้าวและป้องกันไม่ให้เมล็ดข้าวกระจายหกบนโต๊ะหรือตกลงพื้นห้อง

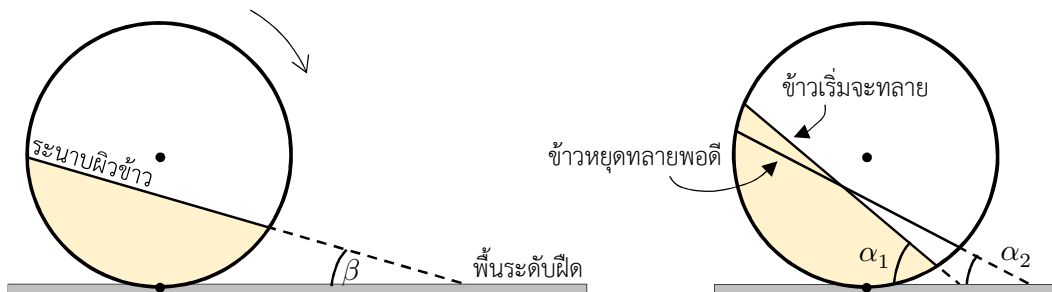


รูปที่ 2: อุปกรณ์สำหรับการทดลองตอนที่ 1

ตอนที่ 2 การวัดมุมทรงตัว โดยการกลิ้งทรงกระบอกรจุข้าวบนพื้นระดับ [5.0 คะแนน]

นอกจากการวัดมุมโดยตรงแล้ว การวัดมุมทรงตัวสามารถทำได้โดยใช้ภาชนะทรงกระบอกรจุข้าว จะทำให้เราสามารถวัดมุมทรงตัวของข้าวได้ง่ายขึ้น โดยเราจะค่อย ๆ กลิ้งทรงกระบอกรจุข้าวบรรจุไว้ในแบบไม่เต็ม ไปบนพื้นระดับฝืด ทำให้ระนาบผิวข้าวเอียงทำมุม β กับแนวระดับ ดังรูปที่ 3 ซ้าย

ถ้าเรายังคงกลิ้งทรงกระบอกรจุข้าวไปเรื่อย ๆ อย่างช้า ๆ จะทำให้มุม β โตขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งระนาบผิวข้าวเริ่มจะมีการทลาย ณ ตอนนั้น มุมของระนาบผิวข้าว β เท่ากับ มุมทรงตัวแรกของข้าว α_1 จากนั้นระนาบผิวข้าวก็ทลายลงมา ตอนที่ข้าวหยุดทลายพอดี มุมของระนาบผิวข้าว β จะเท่ากับ มุมทรงตัวที่สองของข้าว α_2 ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่ามุมทรงตัวแรก (ดูรูปที่ 3 ขวา)



รูปที่ 3 ซ้าย: กลิ้งภาชนะทรงกระบอกรจุข้าวไว้ในแบบไม่เต็ม บนพื้นระดับฝืด

ขวา: กลิ้งทรงกระบอกรจุข้าวไปเรื่อย ๆ จนได้มุมทรงตัวแรก α_1 และมุมทรงตัวที่สอง α_2 ของข้าว

คำสั่ง

จงวัดมุมทรงตัวแรก α_1 และมุมทรงตัวที่สอง α_2 ของข้าว สำหรับปริมาณข้าวที่อยู่ภายในทรงกระบอกรจุข้าวต่างกัน 3 ปริมาณ ได้แก่

- (a) 1 ใน 3 ของปริมาตรทรงกระบอกรจุข้าว
- (b) ครึ่งหนึ่งของปริมาตรทรงกระบอกรจุข้าว และ
- (c) 2 ใน 3 ของปริมาตรทรงกระบอกรจุข้าว

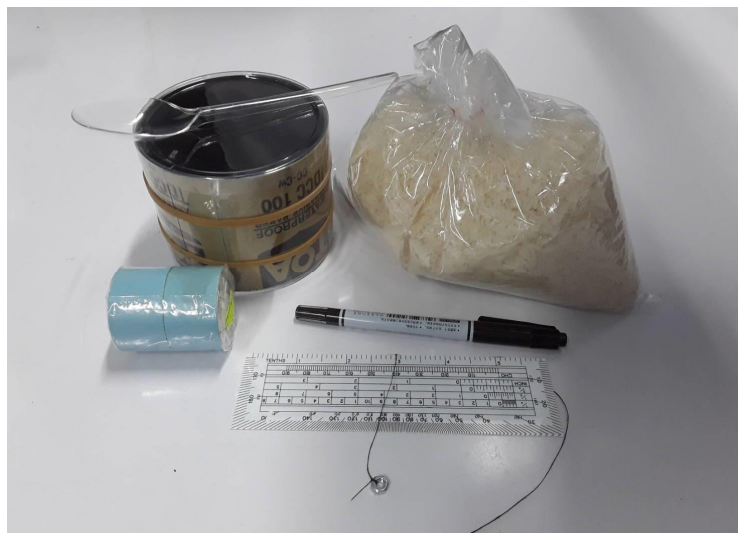
ให้รายงานค่ามุมทรงตัวทั้งสองสำหรับแต่ละปริมาณของข้าว พร้อมค่าคลาดเคลื่อน ให้รายงานผลในหน่วยองศา นักเรียนควรอธิบายและวาดรูปแสดงวิธีการวัดให้ชัดเจน เพื่อให้กรรมการเข้าใจได้

อุปกรณ์สำหรับตอนที่ 2

1. ข้าว
2. ไมโครแทรกเตอร์
3. ด้ายและนอต สำหรับทำเป็นลูกดิ่ง (ผูกไว้ให้แล้วและบรรจุอยู่ในซองไม้บรรทัด)ให้นำลูกดิ่งไปแปะติดกับไมโครแทรกเตอร์ เพื่อใช้ในการวัดมุม (ดูรูปที่ 4)
4. ซ้อน สำหรับตักข้าว
5. ปากกาเมจิกสีดำ
6. ภาชนะทรงกระบอกใส พร้อมฝาปิด (ห้ามดึงกระดาษทรายที่แปะไว้กับผนังด้านในภาชนะออก) และหนึ่งยาง 2 วง ที่พันรอบทรงกระบอกมีไว้เพื่อเพิ่มแรงเสียดทานระหว่างภาชนะทรงกระบอกกับพื้นระดับ (ห้ามแกะออก)
7. เทปขาว สำหรับปิดฝาทรงกระบอกใส่ข้าว และสำหรับประกอบลูกดิ่งเข้ากับไมโครแทรกเตอร์

คำแนะนำ

1. ด้านในของทรงกระบอกจะถูกหุ้มด้วยกระดาษทราย เพื่อเพิ่มแรงเสียดทานระหว่างข้าวกับทรงกระบอกนักเรียนไม่ควรดึงกระดาษทรายออก
2. ก่อนเริ่มทำการหามุมทรงตัวแรก ควรเคาะหรือเขย่าทรงกระบอกให้ระนาบผิวข้าวขนานกับพื้นระดับก่อน
3. นักเรียนควรทดลองกลิ้งทรงกระบอกบรรจุข้าวดูก่อนลงมือวัดจริง เพื่อศึกษาว่ามุมทรงตัวแรกและมุมทรงตัวที่สองเกิดขึ้นตอนไหน



รูปที่ 4: อุปกรณ์สำหรับการทดลองตอนที่ 2: ใช้เทปขาวประกอบไมโครแทรกเตอร์เข้ากับลูกดิ่งเพื่อใช้วัดมุม

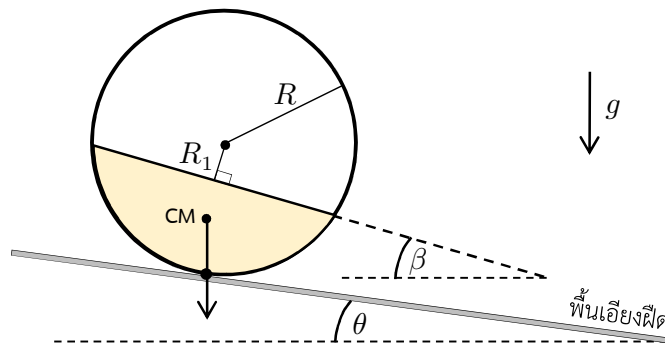
ตอนที่ 3 การวัดมุมทรงตัวแรก โดยการกลิ้งทรงกระบอกบรรจุข้าวบนพื้นเอียง [9.0 คะแนน]

นอกจากการกลิ้งทรงกระบอกที่มีข้าวบรรจุไว้ภายในแบบไม่เต็มไปบนพื้นระดับผิวดแล้ว เรายังสามารถใช้การกลิ้งทรงกระบอกที่บรรจุข้าวไว้ภายในไปบนพื้นเอียงผิวดเพื่อหามุมทรงตัวของข้าวได้ โดยหลักการสำคัญของเรื่องนี้เป็น “ทรงกระบอกจะเริ่มกลิ้งลงพื้นเอียงได้ในขณะที่มุมของระนาบผิวข้าวเท่ากับมุมทรงตัวแรกพอดี”

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เราจะอธิบายถึงการกลิ้งของทรงกระบอกบรรจุข้าวบนพื้นเอียง โดยประมาณว่ามวลของทรงกระบอกน้อยกว่ามวลของข้าวมาก ๆ จนไม่ต้องนำมาพิจารณา

ถ้านำทรงกระบอกที่มีข้าวบรรจุไว้ในบางส่วนมาวางบนพื้นเอียงที่มุมเอียง θ ไม่มากนัก เราจะพบว่าทรงกระบอกสามารถวางอยู่บนพื้นเอียงได้อย่างสมดุล ความสมดุลของทรงกระบอกที่บรรจุข้าวบนพื้นเอียงนั้นเกิดขึ้นขณะที่จุดศูนย์กลางมวลของข้าวอยู่ในตำแหน่งในแนวตั้งเหนือตำแหน่งที่ทรงกระบอกสัมผัสกับพื้นเอียงพอดี ดังรูปที่ 5



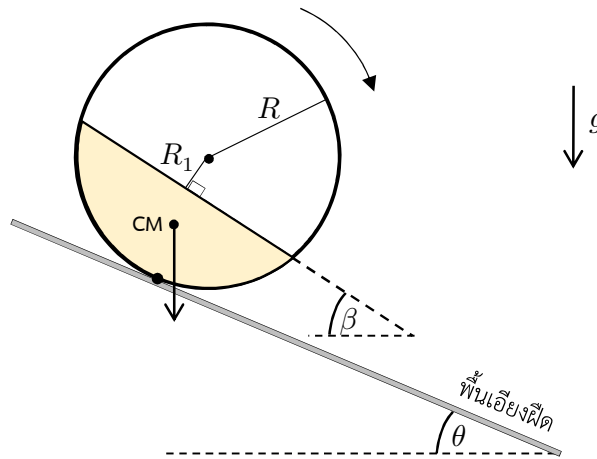
รูปที่ 5: กรณีที่มุมของระนาบผิวข้าว β ทำให้จุดศูนย์กลางมวลอยู่เหนือตำแหน่งของจุดสัมผัสของพื้นเอียงกับทรงกระบอกพอดี ทำให้ไม่เกิดทอร์กรอบจุดสัมผัส ทรงกระบอกจึงอยู่ในสมดุลบนพื้นเอียง

ถ้าเริ่มเพิ่มมุม θ ของพื้นเอียงขึ้น จะทำให้จุดสัมผัสเปลี่ยนไป และทรงกระบอกจะหมุนตามเข็มนาฬิกาจนเข้าสู่สมดุลใหม่ที่จุดศูนย์กลางมวลอยู่เหนือจุดสัมผัสอีกครั้งหนึ่ง โดยในคราวนี้ มุมของระนาบผิวข้าว β จะมากขึ้นกว่าเดิม เราสามารถเพิ่มมุม θ ของพื้นเอียงขึ้นเรื่อย ๆ โดยที่ทรงกระบอกก็ยังเข้าสู่สมดุลใหม่ได้ จนกระทั่งมุม $\beta = \alpha_1$

เมื่อเราปรับระดับพื้นเอียงให้มีมุม θ สูงพอ จนข้าวไม่สามารถก่อกองได้ เพราะ $\beta > \alpha_1$ ข้าวที่อยู่ด้านในทรงกระบอกจะเคลื่อนที่ในลักษณะทลายลงมา และทำให้จุดศูนย์กลางมวลของข้าวย้ายมาอยู่ทางด้านหน้าของจุดสัมผัสทำให้ทรงกระบอกสามารถกลิ้งลงมาได้ด้วยตัวเอง ดังรูปที่ 6

สรุปคือ

1. กรณีที่พื้นเอียงความชันน้อย ทรงกระบอกจะอยู่ในสภาวะสมดุลได้
2. กรณีที่พื้นเอียงความชันมากเกินไป ทำให้ข้าวไม่สามารถก่อกองได้จนพอที่จะทำให้จุดศูนย์กลางมวลอยู่นอกจุดสัมผัสได้ ในกรณีนี้ทรงกระบอกจะกลิ้งลงมา



รูปที่ 6: มุม θ ที่โตเกินไปทำให้ข้าวไม่สามารถก่อกองได้ และทรงกระบอกจะกลิ้งลงพื้นเอียง

เราจะเรียกมุมของพื้นเอียงที่สามารถทำให้ทรงกระบอกบรรจุข้าวเริ่มกลิ้งลงมาได้ด้วยการทลายของข้าวด้านในของทรงกระบอก ว่า **มุมวิกฤติ** θ_c นั่นคือ ในขณะที่พื้นเอียงทำมุม θ_c มุมของระนาบข้าวจะเท่ากับ α_1 พอดี

มุมวิกฤตินี้จะสัมพันธ์กับ มุมทรงตัวแรกของข้าวที่อยู่ภายใน α_1 และปริมาณข้าวที่บรรจุอยู่ภายใน $\eta = \frac{R_1}{R}$ ดังนี้

$$\sin \theta_c = \frac{x_{cm}}{R} \sin \alpha_1 \quad (1)$$



โดยที่ $x_{\text{cm}} = \frac{2R}{3} \frac{(1-\eta^2)^{3/2}}{\cos^{-1} \eta - \eta \sqrt{1-\eta^2}}$ เป็นระยะจากจุด CM ของข้าวไปยังจุดศูนย์กลางของ
ทรงกระบอก

R_1 คือ ระยะห่างตั้งฉากจากจุดศูนย์กลางทรงกระบอกถึงระนาบผิวข้าว โดยถ้าระนาบผิวข้าวอยู่ต่ำกว่าจุดศูนย์กลางทรงกระบอก R_1 จะมีค่าเป็น**บวก** และถ้าระนาบผิวข้าวอยู่สูงกว่าจุดศูนย์กลางทรงกระบอก R_1 จะมีค่าเป็น**ลบ**

R คือ รัศมีของทรงกระบอก

เราสามารถประมาณสมการความสัมพันธ์ของ θ_c และ α_1 ให้เป็นสมการเส้นตรงได้โดยใช้การประมาณของ Taylor รอบจุดที่ข้าวบรรจุอยู่ครึ่งหนึ่งของกระบอกพอดี $\eta = 0$ เราจะได้ว่า

$$\sin \theta_c = 0.508\eta \sin \alpha_1 + \text{constant} \quad (2)$$

เนื่องจากสมการนี้ได้มาจากการประมาณ จึงค่อนข้างแม่นยำในช่วง $-0.4 \leq \eta \leq +0.1$

สำหรับค่า η ที่อยู่นอกช่วงนี้ การประมาณนี้จะผิดพลาดไปมาก

คำสั่ง

ให้นักเรียนทำการทดลองเพื่อหามุมทรงตัวแรกของข้าว α_1 โดยใช้วิธีการ**เริ่มกลิ้ง**ลงพื้นเอียงของทรงกระบอกที่บรรจุข้าวไว้ภายใน โดยใช้ค่า $-0.4 \leq \eta \leq +0.1$

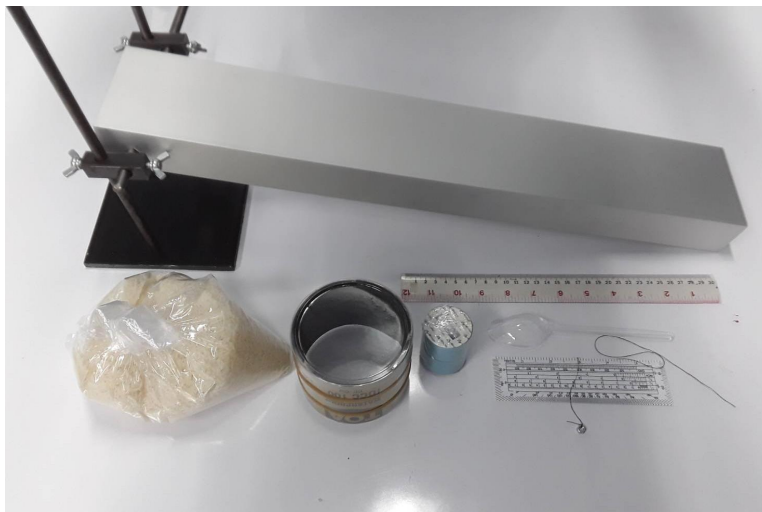
ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียด ซึ่งรวมถึงการระบุตัวแปรต้นและตัวแปรตาม การแสดงตารางบันทึกผล และใช้สมการ (2) ในการเขียนกราฟเส้นตรงเพื่อวิเคราะห์หาค่า α_1 ของข้าว ให้รายงานค่ามุมพร้อมค่าคลาดเคลื่อนในหน่วยองศา

อุปกรณ์สำหรับตอนที่ 3

1. ข้าว
2. ไม้บรรทัด
3. ไมโครเมตร พร้อมด้ายผูกนอต (แบบที่อธิบายไว้ในตอนที่ 2)
4. ซ้อน สำหรับดักข้าว
5. ภาชนะทรงกระบอกใส พร้อมฝาปิด (ห้ามดึงกระดาษทรายที่แปะไว้กับผนังด้านในภาชนะออก) และหนังกาย 2 วง ที่พันรอบทรงกระบอกมีไว้เพื่อเพิ่มแรงเสียดทานระหว่างภาชนะทรงกระบอกกับพื้นเอียง (ห้ามแกะออก)
6. เทปกาว สำหรับปิดฝาทรงกระบอกใส่ข้าว
7. ชุดพื้นเอียง ประกอบด้วยพื้นเอียงและขาตั้งเพื่อยึดและปรับมุมพื้นเอียง
8. กระดาษกราฟ

คำแนะนำ

1. ก่อนนำทรงกระบอกที่ใส่ข้าวไปวางบนพื้นเอียงเพื่อทำการทดลองแต่ละครั้ง ให้เคาะหรือเขย่าทรงกระบอกให้ระนาบผิวข้าวขนานกับพื้นระดับก่อน
2. ในการปรับมุมพื้นเอียงขณะที่มีทรงกระบอกข้าววางอยู่นั้น นักเรียนควรหาวิธีค่อยๆ ปรับมุมพื้นเอียงให้เปลี่ยนอย่างช้าๆ



รูปที่ 7: อุปกรณ์สำหรับการทดลองตอนที่ 3

ตอนที่ 4 การวัดค่าความหนาแน่นการอัด (Packing Density) ของข้าว

(ควรทำตอนที่ 1 – 3 ให้เสร็จก่อน)

[2.5 คะแนน]

ด้วยลักษณะของข้าวที่เป็นเม็ดแข็ง เมื่อนำมาใส่ภาชนะ เมล็ดข้าวจะจัดเรียงกันแบบสุ่ม (Random Close Pack) โดยปริมาตรรวมของข้าวในภาชนะนั้นจะประกอบไปด้วยปริมาตรของข้าวและปริมาตรของช่องว่างระหว่างข้าว ซึ่งอัตราส่วนของปริมาตรของข้าวที่ไม่รวมช่องว่างและปริมาตรของข้าวที่รวมช่องว่างระหว่างเมล็ดข้าวนั้น เรียกว่า ค่าความหนาแน่นการอัด

$$p = \frac{\text{ปริมาตรข้าวไม่รวมช่องว่าง}}{\text{ปริมาตรข้าวรวมช่องว่าง}}$$

อุปกรณ์สำหรับตอนที่ 4

1. ข้าว
2. กระบอกฉีดยา
3. ภาชนะทรงกระบอกสีขาวทึบ (ขวดยา)
4. ช้อน สำหรับตักข้าว
5. น้ำ
6. ถ้วยใสสำหรับใส่น้ำ
7. กล่องใส่แบบมีฝา สำหรับเทข้าวเปียกทิ้ง
8. กระดาษชำระ



รูปที่ 8: อุปกรณ์สำหรับการทดลองตอนที่ 4

คำสั่ง

ให้นักเรียนทำการทดลองเพื่อหาค่าความหนาแน่นการอัดของข้าวที่จัดตัวเรียงกันแบบสุ่ม ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

