



Solution ข้อ 1

ข้อ 1.1 (2.0 คะแนน)

หากนักเรียนไม่ระบุกรอบอ้างอิงในการคำนวณอย่างชัดเจนแล้วให้ถือว่าปริมาณทั้งหมดที่คำนวณได้วัดเทียบกับกรอบอ้างอิงเดียวกันกับโจทย์

วิธีที่ 1 คำนวณในกรอบอ้างอิงของดาวเคราะห์

ใช้กฎอนุรักษ์พลังงานและประมาณมวลของก้อนหินน้อยกว่าดาวเคราะห์มากๆ $m \ll M$

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - mgR$$

แก้สมการ ได้ $v = \sqrt{u^2 + 2gR}$

แปลงกลับมายังกรอบอ้างอิงเดิมจะได้

$$v' = u - \sqrt{u^2 + 2gR}$$

วิธีที่ 2 ในกรอบอ้างอิงเฉื่อยที่ผู้สังเกตอยู่

ใช้กฎอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงาน

$$\frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2 - \frac{GMm}{R} \quad (w \text{ คืออัตราเร็วดาวเคราะห์ตอนหลัง})$$

$$Mu = Mw + mv$$

$$w = u - \frac{m}{M}v$$

$$\frac{1}{2}Mu^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(u^2 - 2\frac{m}{M}uv\right) - mgR \rightarrow v^2 - 2uv - 2gR = 0$$

แก้สมการ ได้ $v = u \pm \sqrt{u^2 + 2gR}$

เนื่องจากก้อนหินถูกดึงเข้าหาดาวเคราะห์จึงมีทิศตรงข้ามกับ u ดังนั้น

$$v = u - \sqrt{u^2 + 2gR}$$

ข้อสังเกต เราไม่สามารถคำนวณโดยให้พลังงานของดาวเคราะห์คงที่ด้วยสมการ

$$\frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{GMm}{R} \quad \text{ซึ่งจะได้} \quad v = \sqrt{2gR} \quad (\text{ถ้าทำแบบนี้ได้ 0 คะแนน})$$

แต่ในกรอบของดาวเคราะห์กลับคิดเสมือนว่าพลังงานของดาวเคราะห์คงที่ได้



ข้อ 1.2.1 (1.2 คะแนน)

ช่วง AB

วิธีที่ 1	วิธีที่ 2
W เป็นบวกเพราะ pdV บวก เพราะ p บวก dV บวก dU เป็นบวกเพราะ pV เพิ่มขึ้นทำให้ T เพิ่มขึ้น (หรือ dU เป็นบวกเพราะ $dU = d\left(\frac{3}{2}pV\right) = \frac{3}{2}pdV > 0 \text{ ทำให้ } T \text{ เพิ่มขึ้น}$ $dQ = dU + dW$ ดังนั้น dQ จึงเป็นบวก dQ เป็นบวกแสดงว่า ความร้อนไหลเข้า	$Q = nc_p \Delta T = nc_p T_B - T_A > 0$ เพราะ p คงตัวแต่ V เพิ่มขึ้น ทำให้ T เพิ่มขึ้นตาม $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ Q เป็นบวกแสดงว่า ความร้อนไหลเข้า

ช่วง BC

W เป็นลบเพราะ pdV ลบ เพราะ p บวก dV ลบ dU เป็นลบเพราะ pV ลดลงทำให้ T ลดลง (หรือเป็นลบเพราะ $dU = d\left(\frac{3}{2}pV\right) = \frac{3}{2}pdV + \frac{3}{2}Vdp < 0$; ซึ่ง dp และ dV เป็นลบ ทำให้ T ลด) $dQ = dU + dW$ ดังนั้น dQ จึงเป็นลบ dQ เป็นลบแสดงว่า ความร้อนไหลออก
--

ช่วง CA

วิธีที่ 1	วิธีที่ 2
W เป็นศูนย์เพราะ dV เป็นศูนย์ dU เป็นบวกเพราะ pV เพิ่มขึ้นทำให้ T เพิ่มขึ้น หรือ (หรือ dU เป็นบวกเพราะ $dU = d\left(\frac{3}{2}pV\right) = \frac{3}{2}Vdp > 0 \text{ ทำให้ } T \text{ เพิ่มขึ้น}$ $dQ = dU + dW$ ดังนั้น dQ จึงเป็นบวก dQ เป็นบวกแสดงว่า ความร้อนไหลเข้า	$Q = nc_v \Delta T = nc_v T_A - T_C > 0$ เพราะ V คงตัวแต่ p เพิ่มขึ้น ทำให้ T เพิ่มขึ้นตาม $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ Q เป็นบวกแสดงว่า ความร้อนไหลเข้า



วิธีที่ 3

หรือนักเรียนสามารถพิสูจน์สมการรวม จากกฎข้อ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์

$$dQ = dU + dW = d\left(\frac{3}{2}pV\right) + pdV$$

ทำให้ได้ว่า

$$dQ = \frac{5}{2}pdV + \frac{3}{2}Vdp$$

ช่วง AB ความดันคงที่ $dp = 0$ และปริมาตรเพิ่มขึ้น dV เป็นบวก ทำให้ $dQ > 0$ ความร้อนไหลเข้า

ช่วง BC dp และ dV เป็นลบ ทำให้ $dQ < 0$ ความร้อนไหลออก

ช่วง CA ความดันเพิ่มขึ้น dp เป็นบวก และ $dV = 0$ ทำให้ $dQ > 0$ ความร้อนไหลเข้า

ข้อ 1.2.2 (0.5 คะแนน)

จุด C อุณหภูมิต่ำสุด และความดันต่ำสุด

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C} \quad \text{ปริมาตรคงตัว ดังนั้น} \quad \frac{p_A}{T_A} = \frac{p_C}{T_C}$$

$$p_C = \frac{p_A}{T_A} T_C = \frac{10 \text{ atm}}{400 \text{ K}} \cdot 300 \text{ K} = \boxed{7.5 \text{ atm}}$$

ข้อ 1.2.3 (1.8 คะแนน)

$$W_{\text{net}} = |Q_{\text{in}}| - |Q_{\text{out}}| = Q_{AB} + Q_{CA} - |Q_{BC}| \quad \text{หรือเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม}$$

$$e = \frac{W}{Q_{\text{in}}} = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{CA}}$$



	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2
Q_{AB}	$dQ = dU + dW = d\left(\frac{3}{2}pV\right) + pdV$ $dQ = \frac{5}{2}pdV + \frac{3}{2}Vdp \quad \text{แต่ในช่วง AB นั้น } p \text{ คงตัว}$ $Q_{AB} = \frac{5}{2}p\Delta V = \frac{5}{2} 10 \times 10^5 \times [2.0 - 0.4 \times 10^{-3}]$ $= 4,000 \text{ J}$	$Q_{AB} = n c_p \Delta T = n c_p T_B - T_A > 0$ $= \frac{1}{8.3} \frac{5R}{2} 2000\text{K} - 400\text{K}$ $= 4,000 \text{ J}$
Q_{CA}	$Q_{CA} = \frac{3}{2}V\Delta p = \frac{3}{2}\Delta p V$ $Q_{CA} = \frac{3}{2} 0.4 \times 10^{-3} 10 \times 10^5 - 7.5 \times 10^5$ $= 150 \text{ J}$	$Q_{CA} = n c_v \Delta T = n c_p T_C - T_A > 0$ $= \frac{1}{8.3} \frac{3R}{2} 400\text{K} - 300\text{K}$ $= 150 \text{ J}$
W_{net}	$W_{net} = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V$ $= \frac{1}{2} [10 - 7.5 \times 10^5] [2.0 - 0.4 \times 10^{-3}]$ $= 200 \text{ J}$	$W_{net} = Q_{in} - Q_{out} $ $= Q_{AB} + Q_{CA} - Q_{BC} $ $= 4000 + 150 - 3950$ $= 200 \text{ J}$

ดังนั้น ประสิทธิภาพของเครื่องจักรความร้อน $e = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{CA}} = \frac{200}{4150} = \boxed{4.8\%}$

ข้อ 1.2.4 (1.5 คะแนน)

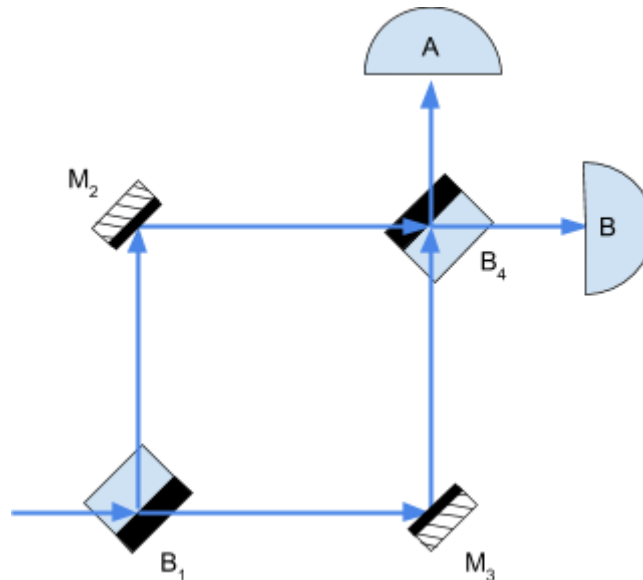
$$e = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{CA}} = \frac{\frac{1}{2} \Delta p \Delta V}{\left(\frac{5}{2} p \Delta V\right) + \left(\frac{3}{2} V \Delta p\right)}$$

กำหนดให้ $V_B = x + 1 V_A$

จากข้อ 1.2.2 เราได้ว่า $\Delta p = \frac{1}{4} p_A$ แทนค่าจะได้ $e = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} p_A\right) [x V_A]}{\left(\frac{5}{2} p_A [x V_A]\right) + \left(\frac{3}{2} V_A \left(\frac{1}{4} p_A\right)\right)} = \frac{x}{20x + 3}$

ประสิทธิภาพสูงสุดเกิดขึ้นเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ $e_{\max} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{20x + 3} = \frac{1}{20} = 5\%$

Solution ข้อ 2



คำถามข้อที่ 2.1

2.1.1 ตัวรับแสง A

ตัวรับแสง A	เฟสที่เพิ่มขึ้น	เฟสรวมที่เพิ่มขึ้น
แสงในแนวตามเข็มนาฬิกา	$B_1 \ 0, M_2 \ \pi, B_4 \ \pi$	2π
แสงในแนวทวนเข็มนาฬิกา	$B_1 \ 0, M_3 \ \pi, B_4 \ 0$	π

ผลต่างเฟส ระหว่างแสงสองทาง คือ π , ดังนั้น ที่ตัวรับแสง A จึงเป็น พอร์ตมืด

2.1.2 ตัวรับแสง B

ตัวรับแสง A	เฟสที่เพิ่มขึ้น	เฟสรวมที่เพิ่มขึ้น
แสงในแนวตามเข็มนาฬิกา	$B_1 \ 0, M_2 \ \pi, B_4 \ 0$	π
แสงในแนวทวนเข็มนาฬิกา	$B_1 \ 0, M_3 \ \pi, B_4 \ 0$	π

ผลต่างเฟส ระหว่างแสงสองทาง คือ 0 , ดังนั้น ที่ตัวรับแสง B จึงเป็น พอร์ตสว่าง



คำถามข้อที่ 2.2

ความสว่างบนตัวรับแสงเปลี่ยนไปหนึ่งริ้ว แสดงว่า optical path ของแสงในเส้นทางที่ผ่านสารละลายน้ำตาลต้องเพิ่มขึ้น (หรือลดลง) λ หรือคิดเป็น phase shift ได้ 2π นั่นคือ

$$2\pi = k_1 L - k_2 L \quad \text{หรือ} \quad 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda_{h_1}} L - \frac{2\pi}{\lambda_{h_2}} L$$

โดยที่ λ_{h_1} คือความยาวคลื่นของแสงในสารละลายน้ำตาลขณะที่มีความเข้มข้น h_1 และ λ_{h_2} คือความยาวคลื่นของแสงในสารละลายน้ำตาลขณะที่มีความเข้มข้น h_2

$$\text{จากที่โจทย์กำหนดให้จะได้ว่า } \lambda_{h_1} = \frac{\lambda_0}{n_{h_1}} = \frac{\lambda_0}{1.33 + \rho h_1}, \lambda_{h_2} = \frac{\lambda_0}{n_{h_2}} = \frac{\lambda_0}{1.33 + \rho h_2}$$

$$\text{แทนค่าลงในสมการ } 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda_{h_1}} L - \frac{2\pi}{\lambda_{h_2}} L \text{ จะได้ว่า } 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \rho L h_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0} \rho L h_2$$

$$\text{หรือ } \Delta h = \frac{\lambda_0}{L\rho}$$

$$\text{แทนค่า } L = 1.0 \text{ cm}, \lambda_0 = 550 \text{ nm}, \rho = 0.146 \text{ จะได้ } \boxed{\Delta h = 377 \text{ ppm}}$$

คำถามข้อที่ 2.3

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega} I_0 \sin^2 \omega t dt = \boxed{\frac{I_0}{2}}$$

คำถามข้อที่ 2.4

2.4.1

แสงเส้นทางที่สองจะมี optical path มากกว่าเส้นทางที่หนึ่ง เพราะความแตกต่างในดรรชนีหักเหระหว่างสารละลายน้ำตาลและน้ำเปล่า

นั่นคือ เส้นทางที่สองจะมีเฟสมากกว่าเส้นทางที่หนึ่งอยู่เท่ากับ

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_2} L - \frac{2\pi}{\lambda_1} L = \frac{2\pi}{\lambda_0/1.33 + \rho h} L - \frac{2\pi}{\lambda_0/1.33} L = \boxed{\frac{2\pi\rho Lh}{\lambda_0}}$$



2.4.2

สนามไฟฟ้ารวม เกิดจากผลบวกของสนามไฟฟ้าทั้งสองเส้นทาง

$$E_{tot} = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin \omega t + \phi$$

จัดรูป ด้วย ทรีโกณมิติ

$$E_{tot} = E_0 2 \sin \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$E_{tot}^2 = E_0^2 4 \sin^2 \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

หรือเขียนเป็นความเข้มแสงได้

$$I_{tot} = 4I_0 \sin^2 \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

เฉลี่ยตามระยะเวลาจะได้

$$\bar{I}_{tot} = 4I_0 \left(\frac{1}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 2I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \rho L h}{\lambda_0} \right)$$

นั่นคือ

$$\alpha = 2, \quad \beta = \frac{\pi \rho L}{\lambda_0}$$

คำถามข้อที่ 2.5

V_{out} เป็นฟังก์ชันของ ความเข้มข้นของสารละลายน้ำตาลดังนี้ $V_{out} = \cos^2 \theta$ เมื่อ $\theta = \beta h = \frac{\pi \rho L h}{\lambda_0}$

ณ จุดอ้างอิง $0.50 = \cos^2 \theta_1$ แก๊สมการจะได้ $\theta_1 = 0.75\pi$

เมื่อความเข้มข้นเพิ่มขึ้นทำให้ $V_{out} = 0.60$ V

จะหาเฟสได้จากสมการ $0.60 = \cos^2 \theta_2$ และได้ $\theta_2 = 0.782\pi$

ดังนั้น เฟสเปลี่ยนไปเท่ากับ $\theta_1 - \theta_2 = 0.75\pi - 0.782\pi = 0.10 \text{ rad}$

จากสมการ $\theta = \frac{\pi \rho L h}{\lambda_0}$ ดังนั้น $\Delta \theta = \left(\frac{\pi \rho L}{\lambda_0} \right) \Delta h$

แทนค่า $0.1 = \left(\frac{\pi \times 0.146 \times 0.01 \text{ m}}{550 \text{ nm}} \right) \Delta h$

แก๊สมการจะได้ $\Delta h = 12 \text{ ppm}$

สารละลายเข้มข้นขึ้น และเราต้องเพิ่มปริมาณน้ำ เพื่อลดความเข้มข้นให้เท่าเดิม

Solution ข้อ 3. สนามแม่เหล็กในเครื่องเร่งอนุภาค (10 คะแนน)

Part A: สนามแม่เหล็ก 2 ขั้ว (Magnetic Dipole) (2.7 คะแนน)

A.1 (0.2 คะแนน) จงหาอัตราเร็วของโปรตอน v ในหน่วยเมตรต่อวินาที

ความสัมพันธ์ของพลังงานจลน์และอัตราเร็ว $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ซึ่งต้องแปลงหน่วยพลังงานเป็นจูลก่อนคำนวณความเร็ว

$$E = 4.0 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \text{ ได้อัตราเร็ว } v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2.77 \times 10^7 \text{ m/s}$$

A.2 (0.9 คะแนน) สนามแม่เหล็กบนแกน x ภายในทรงกระบอกสามารถประมาณให้อยู่ในรูปของ

$$B(x) \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \left(k_0 + k_1 \frac{x}{R} + k_2 \frac{x^2}{R^2} \right) \text{ เมื่อ } x \ll R \text{ โดยที่ } k_0, k_1 \text{ และ } k_2 \text{ เป็นค่าคงตัว จงระบุทิศของ}$$

สนามแม่เหล็กบนจุดที่อยู่บนแกน x พร้อมหาค่า k_0, k_1 และ k_2

$$\text{นักเรียนอาจใช้การประมาณ } 1 + \beta^n \approx 1 + n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\beta^2 \text{ เมื่อ } \beta \ll 1$$

เนื่องจากเส้นลวดยาวมากเมื่อเทียบกับรัศมีของมัน เราจึงสามารถคำนวณหาสนามแม่เหล็กจากเส้นลวดยาวแต่ละเส้นตามกฎของแอมแปร์คือ $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ และสนามแม่เหล็กจากเส้นลวดทั้งสองเสริมกันบนแกน x เมื่อใช้ระยะจากลวดแต่ละเส้น จะได้

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{2R}{R^2 - x^2} \right) \text{ ทิศ } +y \text{ หรือใช้ unit vector } +\hat{j}$$

$$B(x) \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{R^2} \right) \text{ เมื่อ } x \ll R$$

$$\text{ดังนั้น } k_0 = \frac{2}{\pi}, k_1 = 0, k_2 = \frac{2}{\pi}$$

A.3 (1.4 คะแนน) จงหาว่ากระแส I ต้องมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ลำอนุภาคเคลื่อนที่รอบเครื่องเร่งอนุภาคได้พอดี กำหนดให้โปรตอนแต่ละตัวมีมวล m ประจุ q อัตราเร็ว v และนักเรียนไม่ต้องคำนึงถึงแรงระหว่างอนุภาคด้วยกันเอง

ภายในไดโพล อนุภาคจะเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลม

เราสามารถคำนวณรัศมีความโค้ง ρ ของไดโพล จาก $\frac{mv^2}{\rho} = qvB$

และมุมที่เบนไปต้องสอดคล้องกับ geometry ของไดโพล

คำนวณ $\Delta\theta$ จาก geometry ของไดโพล $\Delta\theta = \frac{D}{\rho}$

เมื่อ D คือความยาวของเส้นลวดนำกระแสไฟฟ้า

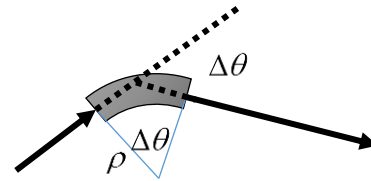
เมื่อผ่านไดโพลจำนวน N อันจะครบรอบพอดี จะได้ $N\Delta\theta = 2\pi$

$$\text{ดังนั้นสนามแม่เหล็กเท่ากับ } B = \frac{mv}{\rho q} = \frac{2\pi mv}{NDq}$$

เมื่อเทียบกับสนามแม่เหล็กตามทฤษฎีระนาบ $B(x) = k_0 \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{\pi R}$ (หรือ $B(x) = 1.0 \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R}$)

จะได้ว่า

$$I = \frac{2\pi^2 Rmv}{\mu_0 NDq} \quad \text{หรือ} \quad I = \frac{4\pi Rmv}{\mu_0 NDq}$$



A.4 (0.2 คะแนน) กำหนดให้ความยาวของลวดนำกระแสไฟฟ้า $D = 2.0 \text{ m}$, รัศมีทรงกระบอกสุญญากาศ $R = 5.0 \text{ cm}$, จำนวน Magnetic Dipole $N = 10$ และความยาวของเส้นรอบวงของวงแหวน $\ell = 400 \text{ m}$ จงหาค่าของ I ในหน่วยแอมแปร์ (นักเรียนอาจไม่ได้ใช้ตัวแปรทุกตัว)

แทนค่าตัวแปรต่างๆ และใช้สูตรที่ได้จากข้อ A.2 และใช้ความเร็วจากข้อ A.3

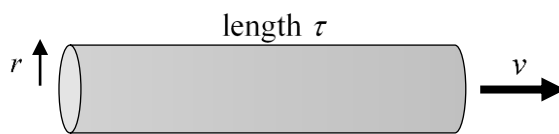
$$I = \frac{2\pi^2 Rmv}{\mu_0 NDq} = 1.14 \times 10^4 \text{ A}$$

$$\text{หรือ } I = \frac{4\pi Rmv}{\mu_0 NDq} = 7.23 \times 10^3 \text{ A}$$

Part B: การกระจายออกของลำนุภาค (2.2 คะแนน)

B.1 (1.8 คะแนน) กำหนดให้ลำนุภาคเริ่มเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $z = 0$ โดยมีความเร็วในแนวแกน z คงตัวเท่ากับ v ในลำนุภาคมีโปรตอนจำนวน n อนุภาคกระจายอย่างสม่ำเสมอ รัศมีเริ่มต้นของลำนุภาคเท่ากับ r_0 จงหาความเร่ง a_0 ในแนวรัศมี ของอนุภาคที่ขอบของลำนุภาคที่ตำแหน่งเริ่มต้น

ประจุในลำนุภาคทำให้เกิดสนามไฟฟ้าและการเคลื่อนที่ของลำนุภาคทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กด้วย ดังนั้น แรงระหว่างอนุภาคมีด้วยกัน 2 แรงคือแรงแม่เหล็กและแรงไฟฟ้า เนื่องจากลำนุภาคมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับความยาว เราจึงสามารถใช้กฎของเกาส์และแอมแปร์ที่เหมาะสมได้



แรงไฟฟ้า

จากความสมมาตรของลำนุภาคนยาว เราประมาณได้ว่าสนามไฟฟ้าอยู่ในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ (หรือขนานกับแนวรัศมีของลำนุภาค) สนามไฟฟ้าสามารถคำนวณได้โดยสร้าง Gaussian surface เป็นทรงกระบอกรอบลำนุภาค คำนวณฟลักซ์ไฟฟ้าและประจุภายใน nq ได้

$$E = \frac{nq}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau}$$

ดังนั้น แรงไฟฟ้าที่ขอบของลำนุภาค $F_E = qE = \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau}$ ทิศออกจากแกนกลาง

แรงแม่เหล็ก

สนามแม่เหล็กมาจากการกระแสไฟฟ้าที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อลำนุภาคความยาว τ อนุภาคประจุ q จำนวน n ตัวเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เท่ากับมีกระแสไฟฟ้า

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda v \Delta t}{\Delta t} = \frac{nqv}{\tau}$$

เมื่อ λ คือประจุต่อความยาว การคำนวณสนามแม่เหล็กทำได้โดยสร้าง Amperian loop รอบลำนุภาค

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 nqv}{2\pi r_0 \tau}$$

ดังนั้น แรงแม่เหล็กที่ขอบของลำนุภาค $F_B = qvB = \frac{\mu_0 nq^2 v^2}{2\pi r_0 \tau}$ ทิศเข้าสู่แกนกลาง

แรงลัพธ์และความเร่ง

แรงลัพธ์เกิดจากการรวมแรงไฟฟ้าและแรงแม่เหล็กซึ่งมีทิศตรงข้ามกัน

$$F = \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau} - \frac{\mu_0 nq^2 v^2}{2\pi r_0 \tau} = \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) = \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ทิศออกไปตามแนวรัศมีทรงกระบอกเนื่องจาก $\epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} < 1$ (นักเรียนไม่จำเป็นต้องเขียน $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$) แรงแลพัทธ์นี้มีค่าน้อยมากเมื่ออนุภาคมีความเร็วเข้าใกล้ความเร็วแสงในเครื่องเร่งอนุภาคทั่วไป (ซึ่งการกระจายออกจะมาจากกระบวนการอื่นเป็นหลัก)

$$\text{ดังนั้น ความเร่ง } a_0 = \frac{F}{m} = \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

B.2 (0.4 คะแนน) รัศมีของลำอนุภาคจะเปลี่ยนโดยประมาณไปตามสมการ $r = r_0 + \alpha z^2$ สำหรับตำแหน่ง $z < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

โดยที่ α เป็นค่าคงตัว จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง α , a_0 และ v และคำนวณค่า α เป็นตัวเลข กำหนดให้ $n = 10^6$, พลังงานจลน์ของอนุภาคเท่ากับ $E = 4.0 \text{ MeV}$, รัศมีเริ่มต้น $r_0 = 1.0 \text{ mm}$ ความยาวของลำอนุภาค

$$\tau = 30 \text{ cm}$$

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเกิดในแนวรัศมี ความเร็วในแนวแกน z จึงคงตัว หรือระยะ $z = vt$ นำไปแทนค่าในสมการรัศมีที่โจทย์กำหนดให้ จะได้ $r = r_0 + \alpha v^2 t^2$ ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้ว่า ความเร่งในแนวรัศมีเท่ากับ $a_0 = 2\alpha v^2$

$$\text{ดังนั้น } \alpha = \frac{a_0}{2v^2} = \frac{1}{2v^2} \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 \tau m} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2)$$

หาค่า v จากพลังงานจลน์ $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ ตามข้อ A.1

แทนค่าตัวเลขทั้งหมด ได้ $\alpha = 5.94 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$

(ซึ่งแสดงว่าอนุภาคควไปสองสามรอบก็จะมีรัศมีเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ)

หมายเหตุ: ที่มาของสูตร $r = r_0 + \alpha z^2$ (ไม่ได้ให้นักเรียนพิสูจน์ เพราะเป็นคณิตศาสตร์ล้วน)

จากความเร่ง $a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{nq^2}{2\pi\epsilon_0 \tau m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{K}{r}$ และ $z = vt$ สำหรับลำรัศมี r ใดๆ

$$\text{ดังนั้น } \frac{d^2 r}{dt^2} = v_r \frac{dv_r}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d(v_r^2)}{dr} = \frac{K}{r} \text{ เมื่ออินทิเกรตจะได้ } v_r = \sqrt{2K \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \text{ และ } v_r = \frac{dr}{dt} = v \frac{dr}{dz}$$

ไม่สามารถหา exact solution ต่อได้ ต้องใช้การประมาณ $r = r_0 + \epsilon$ เมื่อ ϵ มีค่าน้อย จะได้

$$v \frac{d\epsilon}{dz} = \sqrt{2K \ln\left(\frac{r_0 + \epsilon}{r_0}\right)} = \sqrt{2K \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{r_0}\right)} \approx \sqrt{\frac{2K}{r_0}} \sqrt{\epsilon}$$

$$\text{เมื่ออินทิเกรตจะได้ } \epsilon = \frac{K}{2v^2 r_0} z^2 \text{ หรือ } r = r_0 + \left(\frac{K}{2v^2 r_0}\right) z^2 = r_0 + \left(\frac{a_0}{2v^2}\right) z^2$$

Part C: การโฟกัสลำอนุภาค (5.1 คะแนน)

C.1 (0.3 คะแนน) ให้ลำอนุภาคเคลื่อนที่ไปทาง $-z$ ดังรูปที่ 3.5 และ 3.6 สำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่ผ่านแกน x (อยู่บนระนาบ xz) นั้น Magnetic Quadrupole ทำตัวเป็นเลนส์นูนหรือเลนส์เว้า และสำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่ผ่านแกน y (อยู่บนระนาบ yz) นั้น Magnetic Quadrupole ทำตัวเป็นเลนส์นูนหรือเลนส์เว้า ให้ระบุคำตอบพร้อมเหตุผลประกอบในกระดาษสรุปคำตอบ

ใช้กฎมือขวาในการหาทิศทางของแรงแม่เหล็กที่ทำกระทำกับอนุภาคโปรตอน

อนุภาคบนแกน x มีแรงกระทำเข้าหาแกนกลาง จึงเป็นเลนส์นูน

อนุภาคบนแกน y มีแรงกระทำออกจากแกนกลาง จึงเป็นเลนส์เว้า

C.2 (1.8 คะแนน) จงหาค่าของ a และ b เมื่อ $x \ll R$ และ $y \ll R$ เขียนคำตอบในรูปของ μ_0 , R และ I (ไม่ต้องคำนวณเป็นตัวเลข)

สนามแม่เหล็กเกิดจากกระแสไฟฟ้า 4 เส้น เราสามารถใช้กฎของแอมแปร์ในการหาสนามแม่เหล็กจากแต่ละเส้น แล้วนำมารวมกัน โดยคิดองค์ประกอบตามแกนที่พิจารณา

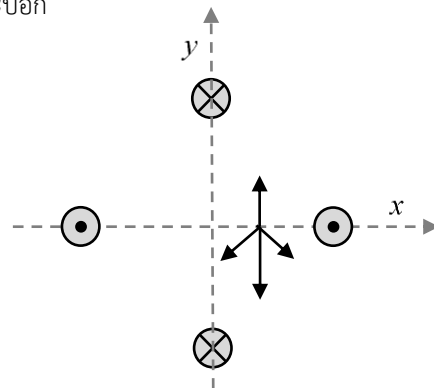
พิจารณาขนาดสนามแม่เหล็กบนแกน x (หรือ y ก่อนก็ได้) ภายในทรงกระบอก

$$\text{จากลวดขวา ขนาด } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-x)}$$

$$\text{จากลวดซ้าย ขนาด } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+x)}$$

$$\text{จากลวดบน ขนาด } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\text{จากลวดล่าง ขนาด } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{R^2 + x^2}}$$



เนื่องจากความสมมาตร สนามแม่เหล็กในแกนอนจะหักล้างกันหมดไป เหลือสนามรวมในแนวแกนตั้ง ดังนั้น ต้องแยกองค์ประกอบของสนามจากลวดบนและล่าง เอาเฉพาะในแนวแกนตั้ง

$$\text{ขนาดองค์ประกอบในแนวแกนตั้ง จากลวดบน } B = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(R^2 + x^2)}$$

$$\text{ขนาดองค์ประกอบในแนวแกนตั้ง จากลวดล่าง } B = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(R^2 + x^2)}$$

ดังนั้นสนามลัทธิบนแกน x (คำนึงถึงเครื่องหมาย + และ -)

$$\begin{aligned} B(x) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R-x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+x)} - \frac{\mu_0 Ix}{2\pi(R^2+x^2)} - \frac{\mu_0 Ix}{2\pi(R^2+x^2)} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-4xR^2}{R^4-x^4} \right) \\ &\approx -\frac{2\mu_0 I}{\pi R^2} x \end{aligned}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ $\vec{B} = ay\hat{i} + bx\hat{j}$ สรุปได้ว่า $b = -\frac{2\mu_0 I}{\pi R^2}$

จากความสมมาตรของโครงสร้างเส้นลวด เราสรุปได้ทันทีว่า $a = -\frac{2\mu_0 I}{\pi R^2}$ เช่นกัน

C.3 (1.7 คะแนน) จงหาความยาวโฟกัส f_x ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ผ่านแกน x และหาความยาวโฟกัส f_y ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ผ่านแกน y ให้ประมาณว่าความยาวของ Quadrupole มีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวโฟกัส ให้เขียนคำตอบในรูปของ a, b, d และความเร็ว v ในแนวแกน z ของอนุภาคแต่ละตัวที่มีมวล m ให้ใช้เครื่องหมาย + สำหรับเลนส์นูน และเครื่องหมาย - สำหรับเลนส์เว้า

แบบที่ 1 ใช้ Impulse

เนื่องจากความเร็วในแนวแกน x และ y มีค่าน้อยเทียบกับความเร็วในแนวแกน z หรือ ความยาวของ Quadrupole มีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวโฟกัส เราจึงสามารถใช้แนวคิดแบบอิมพัลส์ได้ แรงที่กระทำในแนวตั้งฉากกับลำอนุภาคถือว่าเกิดขึ้นในช่วงเวลาน้อยๆ $\Delta t = \frac{d}{v}$

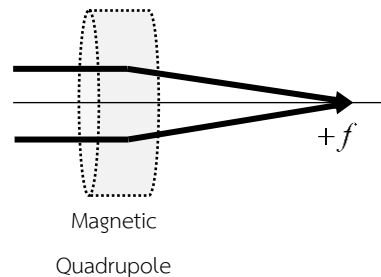
พิจารณาอนุภาคโปรตอนบนตำแหน่ง x ซึ่งเป็นเลนส์นูน
อิมพัลส์บนอนุภาคบนแกน x เท่ากับ

$$\Delta P_x = qvB\Delta t = -qv(bx)\frac{d}{v} = -bqdx$$

จากรูปสามเหลี่ยม เราได้อัตราส่วน

$$\frac{|\Delta P_x|}{|P_z|} = \frac{bqdx}{mv} = \frac{x}{f_x}$$

ดังนั้นความยาวโฟกัส $f_x = +\frac{mv}{bqd}$ และคำตอบไม่ขึ้นกับค่า x ดังนั้น อนุภาคทุกตัวบนแกน x มีระยะโฟกัสเท่ากัน



แบบที่ 2 ใช้สมการ SHM

พิจารณาจากแรงที่กระทำกับอนุภาคที่ตำแหน่ง x เท่ากับ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qvB = -bqv x$$

ซึ่งเป็นสมการ SHM และมีคำตอบคือ

$$x = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{qvb}{m}} t \right)$$

เมื่อนำอนุพันธ์เทียบเวลาเพื่อหาความเร็วในแกน x จะได้

$$v_x = -x_0 \sqrt{\frac{qvb}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{qvb}{m}} t \right)$$

อนุภาคใช้เวลาประมาณ $t = \frac{d}{v}$ ในการเคลื่อนที่ผ่าน Quadrupole และเราใช้การประมาณ $\sin \theta \sim \theta$ สำหรับเฟส
น้อยๆ ดังนั้น

$$v_x \approx -x_0 \sqrt{\frac{qvb}{m}} \sqrt{\frac{qvb}{m}} \frac{d}{v} \approx -\frac{qb d x_0}{m}$$

จากรูปสามเหลี่ยม เราได้อัตราส่วน $\frac{|v_x|}{|v_z|} = \frac{b q d x_0}{m v} = \frac{x_0}{f_x}$ ซึ่งให้คำตอบเดียวกัน $f_x = +\frac{m v}{b q d}$ ซึ่งเป็นเลนส์นูน

จากความสมมาตรของระบบ (หรือทำซ้ำอีกครั้ง) เราได้ความยาวโฟกัส $f_y = -\frac{m v}{a q d}$ เลนส์เว้า

หมายเหตุ:

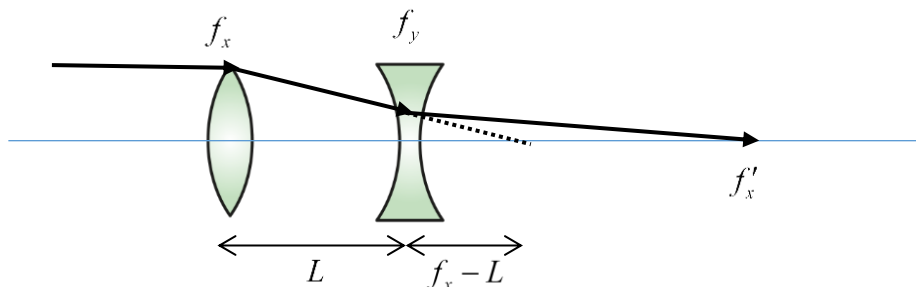
ในกรณีที่นักเรียนทำเลนส์เว้าก่อน จะเจอ $m \frac{d^2 y}{dt^2} = qvB = +a q v y$ ซึ่งจะเป็นฟังก์ชัน hyperbolic หรือ
exponential แล้วใช้การประมาณ $\sqrt{\frac{qvb}{m}} \frac{d}{v}$ มีค่าน้อยแล้วจะได้คำตอบเดียวกัน ให้ใช้แนวทางการตรวจ SHM

C.4 (1.3 คะแนน) กำหนดให้ขนาด $L < f_x$ และขนาด $L < f_y$ อนุภาค จงหา f'_x และ f'_y เขียนคำตอบในรูปของ m , v , q , a , b , d และ L จากคำตอบที่ได้ ให้นักเรียนระบุพร้อมแสดงเหตุผลประกอบว่าเลนส์รวมของแต่ละแกน เป็นเลนส์เว้าหรือเลนส์นูนลงในกระดาษสรุปคำตอบ

การสลับกระแสมีผลให้เกิดการสลับประเภทของเลนส์ (จากเลนส์นูนกลายเป็นเลนส์เว้า และเว้ากลายเป็นนูน) และเราสามารถใช้แนวคิดเลนส์บางได้ เพราะขนาดความยาวโฟกัส $f > L \gg d$

พิจารณาอนุภาคบนแนวแกน x

- ล้ออนุภาคขนานที่เข้ามาจากซ้ายมือ
- เลนส์ตัวที่หนึ่งเป็นเลนส์นูน ความยาวโฟกัส f_x (มีค่าบวก)
- เลนส์ตัวที่สองเป็นเลนส์เว้าเนื่องจากมีการสลับกระแส ความยาวโฟกัส f_y (มีค่าติดลบ)
- เลนส์นูนและเลนส์เว้ามีขนาดความยาวโฟกัสเท่ากัน $f_x + f_y = 0$
- ภาพจากเลนส์ที่หนึ่งจะเป็นวัตถุให้เลนส์ที่สอง
- ระยะภาพจากเลนส์ที่สองก็คือระยะโฟกัสของระบบ f'_y



ได้สมการเลนส์บางตัวที่สอง $\frac{1}{L-f_x} + \frac{1}{f'_x} = \frac{1}{f_v}$ จัดรูปและใช้สมการ $f_x + f_y = 0$ จะได้ความยาวโฟกัส

$$f'_x = \frac{-f_y(f_x - L)}{L} = \frac{\frac{mv}{aqd} \left(\frac{mv}{bqd} - L \right)}{L}$$

ซึ่งมากกว่าศูนย์ (เพราะ f_v เป็นลบ $f_x > L$) แสดงว่า Magnetic Quadrupole คำนึงเป็นเลนส์บนทางแกน x

พิจารณาแบบเดียวกันบนแกน y

- อนุภาคจะผ่านเข้ามาทางเลนส์เว้าก่อน แล้วไปเจอเลนส์นูน

ได้สมการเลนส์บางตัวที่สอง (เลนส์นูน) $\frac{1}{L - f_v} + \frac{1}{f'_v} = \frac{1}{f_x}$ จัดรูป ได้ความยาวโฟกัส

$$f'_y = \frac{f_x(L - f_y)}{L} = \frac{\frac{mv}{bqd} \left(L + \frac{mv}{aqd} \right)}{L}$$

ซึ่งมากกว่าศูนย์ (เพราะ f_y เป็นลบ f_x เป็นบวก) แสดงว่า Magnetic Quadrupole คู่นี้เป็นเลนส์ขนทางแกน y ด้วย

จะเห็นว่าทั้งสองแกนกลายเป็นเส้นสั้นๆ และหาก $f \gg L$ จะได้ $f'_x = f'_y \sim \frac{f^2}{L}$