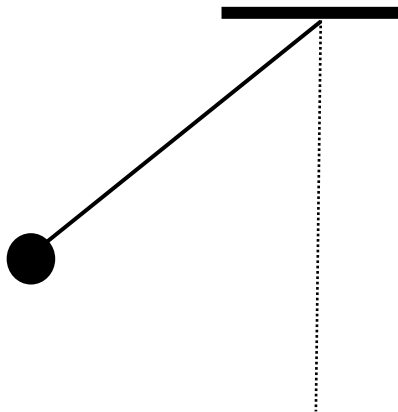


ข้อที่ 1

ข้อที่ 1.1 ประจุแกว่งในสนามไฟฟ้า [6.0 คะแนน]

เฉลย



ก)

ใช้กฎอนุรักษ์พลังงาน งาน(หรือพลังงาน)จากสนามไฟฟ้า เปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์ที่จุดสูงสุด

$$\Delta PE_G = -\Delta PE_E \text{ หรือ } U_{E1} + U_{G1} = U_{E2} + U_{G2}$$

งาน(หรือการเปลี่ยนพลังงาน) ของสนามไฟฟ้า (ไม่สนใจเครื่องหมายจุดนี้)

$$\Delta PE_E = qE\Delta x = -qE\ell \sin \theta_m$$

การเปลี่ยนพลังงานศักย์โน้มถ่วง

$$\Delta PE_G = mg\ell(1 - \cos \theta_m)$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน (หรือสมการงานของสนามไฟฟ้ากลายเป็นพลังงานศักย์)

(สมการนี้ต้องมีเครื่องหมายบวกลบถูกต้อง)

$$qE\ell \sin \theta_m = mg\ell(1 - \cos \theta_m)$$

แก้สมการหาค่ามุม

$$\frac{1 - \cos \theta_m}{\sin \theta_m} = \frac{qE}{mg}$$

$$\tan \frac{\theta_m}{2} = \frac{qE}{mg}$$

$$\theta_m = 2 \tan^{-1} \frac{qE}{mg}$$

ข)

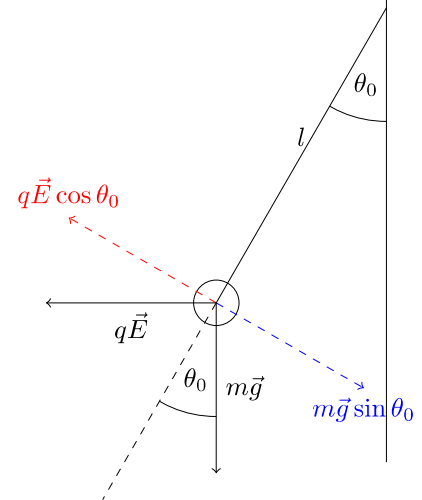
จากรูปข้างต้น แรงในทิศตั้งฉากอยู่ในสมดุล เพราะฉะนั้น

$$mg \sin \theta_0 = qE \cos \theta_0$$

ดังนั้น

$$\tan \theta_0 = \frac{qE}{mg}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{qE}{mg}$$



ค)

จากรูปข้างต้นเราจะได้แรงลัพธ์ในทิศที่ตั้งฉากกับเชือกที่ถูกขยับไป $\delta\theta$ มีค่าเท่ากับ

$$F_T = -mg \sin(\theta_0 + \delta\theta) + qE \cos(\theta_0 + \delta\theta)$$

ใช้การประมาณว่า $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$, $\cos \delta\theta \approx 1$

$$\cos(\theta_0 + \delta\theta) \approx \cos(\theta_0) - \sin(\theta_0) \delta\theta$$

$$\sin(\theta_0 + \delta\theta) \approx \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \delta\theta$$

แทนเข้าไปในสมการสำหรับ F_T เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_T &= -mg \sin(\theta_0 + \delta\theta) + qE \cos(\theta_0 + \delta\theta) \\ &= -mg [\sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \delta\theta] + qE [\cos(\theta_0) - \sin(\theta_0) \delta\theta] \end{aligned}$$

แทนค่ามุมสมดุลที่ $mg \sin \theta_0 = qE \cos \theta_0$

$$F_T = -(mg \cos \theta_0 + qE \sin \theta_0) \delta\theta$$

สมการ Simple Harmonic เชิงมุม

$$\text{ขนาดของทอร์ก} \quad \tau = I\alpha = -I\Omega^2 \delta\theta$$

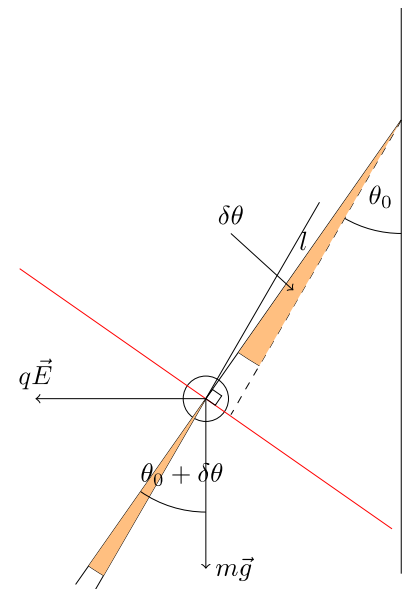
$$\ell F_T = -m\ell^2 \Omega^2 \delta\theta$$

$$F_T = -m\ell \Omega^2 \delta\theta$$

ดังนั้นเทียบสมการจะได้

$$\omega^2 = \frac{1}{m\ell} (mg \cos(\theta_0) + qE \sin(\theta_0))$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\ell} (mg \cos(\theta_0) + qE \sin(\theta_0))}$$





ข้อที่ 1.2 คานกัณฑ์รถไฟ [4.0 คะแนน]

เฉลย

ก)

หาความเร่งเชิงมุมจาก $\Sigma \tau = I\alpha$

ผลรวมของทอร์กรอบแกนหมุน

$$\Sigma \tau = \tau + mg\ell - Mg \frac{L}{2}$$

Moment of Inertia

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2$$

หาความเร่งเชิงมุม

$$\alpha = \frac{\Sigma \tau}{I} = \frac{\tau + mg\ell - Mg \frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2}$$

หาความเร่งเชิงมุมสูงสุดจากอนุพันธ์เทียบกับ ℓ

$$\frac{d\alpha}{d\ell} = 0$$

$$\frac{d}{d\ell} \left(\frac{\tau + mg\ell - Mg \frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2} \right) = 0$$

$$\frac{mg}{\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2} - \left(\tau + mg\ell - Mg \frac{L}{2} \right) \frac{2m\ell}{\left(\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2 \right)^2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}ML^2 + m\ell^2 \right) - \left(\frac{\tau}{g} + m\ell - M \frac{L}{2} \right) 2\ell = 0$$

จะได้สมการกำลังสอง

$$m\ell^2 + 2 \left(\frac{\tau}{g} - M \frac{L}{2} \right) \ell - \frac{1}{3}ML^2 = 0$$

$$\text{จาก } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เลือกคำตอบที่เป็นบวกจะได้

$$\ell = \frac{-\left(\frac{\tau}{g} - M \frac{L}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\tau}{g} - M \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{3}mML^2}}{m}$$

ข) วิเคราะห์สถานการณ์ก่อนหน้า หมุนคานได้ช้ามาก

$$\tau \approx \frac{MgL}{2}$$

แทนค่าในสมการจาก ก) จะได้ $\ell \approx L \sqrt{\frac{M}{3m}}$



ข้อที่ 2.1 ชั้นน้ำที่ผนังภาชนะปิดทรงกลม[5.0 คะแนน]

เฉลย 2.1

ก. จากกฎของก๊าซที่ปริมาตรคงที่ $\frac{P}{T} = \text{ค่าคงที่}$

ความดันสุดท้ายเป็น $P_G = P_0 \frac{T_1}{T_0}$

ข. ความดันรวมคิดจากความดันย่อย $P_1 = P_G + P_w$

$$P_w = P_1 - P_G = P_1 - P_0 \frac{T_1}{T_0}$$

ใช้กฎของก๊าซ $PV = nRT$ หาปริมาณโมลน้ำที่มีอยู่ในภาชนะปิดทรงกลมที่ T_1

$$n_w = \frac{P_w V}{RT_1}$$

ซึ่งรวมเป็นมวลที่ T_0 ของน้ำที่เกาะอยู่เดิม $= M_w n_w = \frac{M_w P_w V}{RT_1}$

จาก $\rho = \frac{M}{V}$ คิดเป็นปริมาตรรวมของน้ำ $V_w = \frac{M_w n_w}{\rho} = \frac{M_w P_w V}{\rho RT_1}$

ภาชนะปิดทรงกลมเป็นทรงกลม ปริมาตร $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3}$$

พื้นที่ผิวของผนังภาชนะปิดทรงกลมเท่ากับ $S = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{2/3} = (4\pi)^{1/3} (3V)^{2/3}$

ความหนาของชั้นน้ำเท่ากับ

$$\begin{aligned} &= \frac{V_w}{S} \\ &= \frac{M_w P_w V}{\rho RT_1} \frac{1}{(4\pi)^{1/3} (3V)^{2/3}} \\ &= \frac{M_w V^{1/3}}{(36\pi)^{1/3} \rho RT_1} \left(P_1 - P_0 \frac{T_1}{T_0} \right) \end{aligned}$$

ค. ใช้กฎของก๊าซ $PV = nRT$ หาปริมาณโมลก๊าซที่มีอยู่ในภาชนะปิดทรงกลมที่ T_0

$$n_G = \frac{P_0 V}{RT_0}$$

ความ

จาก $Q = Wt$ อัตราส่วนของเวลามาจากความร้อนที่ต้องใช้

$$\begin{aligned} \frac{t_B}{t_A} &= \frac{Q_B}{Q_A} \\ &= \frac{Q_G + Q_w + Q_L}{Q_G} = 1 + \frac{Q_w + Q_L}{Q_G} \end{aligned}$$



จากความจุความร้อนของก๊าซที่ปริมาตรคงตัว $Q_W = n c_V \Delta T$ และ $Q_L = nL$

$$\begin{aligned} \frac{t_B}{t_A} &= 1 + \frac{n_W c_{VW} \Delta T}{n_G c_{VG} \Delta T} + \frac{n_W L}{n_G c_{VG} \Delta T} \\ &= 1 + \frac{c_{VW} P_W V}{RT_1} \frac{RT_0}{c_{VG} P_0 V} + \frac{P_W V}{RT_1} \frac{RT_0}{P_0 V} \frac{L}{c_{VG} (T_1 - T_0)} \\ &= 1 + \frac{c_{VW} P_W}{T_1} \frac{T_0}{c_{VG} P_0} + \frac{P_W}{T_1} \frac{T_0}{P_0} \frac{L}{c_{VG} (T_1 - T_0)} \\ &= 1 + \left(\frac{P_W T_0}{c_{VG} P_0 T_1} \right) \left(c_{VW} + \frac{L}{(T_1 - T_0)} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{T_0}{c_{VG} P_0 T_1} \right) \left(c_{VW} + \frac{L}{(T_1 - T_0)} \right) \left(P_1 - P_0 \frac{T_1}{T_0} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{c_{VG}} \left(c_{VW} + \frac{L}{(T_1 - T_0)} \right) \left(\frac{T_0 P_1}{T_1 P_0} - 1 \right) \end{aligned}$$

ข้อที่ 2.2 ฉบับ [6.0 คะแนน]

เฉลย 2.2

- a) เนื่องจากไม่ใ้มีลักษณะเป็นฉนวนความร้อน จึงควรบรรยายการอัดตัวแบบอะเดียบาติก อย่างไรก็ดี ตามหากนักเรียนตอบว่าเป็นการอัดตัวแบบอุณหภูมิคงตัวก็จะให้คะแนนได้เล็กน้อย หากเป็นกระบวนการแบบอื่นไม่ให้คะแนน
- b) คิดแบบอะเดียบาติก: (หากนักเรียนตอบข้อ a) แบบอุณหภูมิคงตัวก็ต้องคำนวณแบบอุณหภูมิคงตัว)

ใช้ความสัมพันธ์ $PV^\gamma = \text{const.}$ โดยที่ $\gamma \equiv \frac{c_P}{c_V}$

$$P_a (L_0)^\gamma = P (L)^\gamma$$

คิดสมมูลแรง

$$F = PA - P_a A$$

$$P_a A L_0^\gamma = (F + P_a A) L^\gamma$$

$$L = L_0 \left(\frac{P_a A}{F + P_a A} \right)^{c_V / c_P}$$

คิดแบบอุณหภูมิคงตัว ใช้ $PV = \text{const.}$:

$$P_a L_0 = PL$$

$$F = PA - P_a A$$



$$P_a A L_0 = (F + P_a A) L$$

$$L = L_0 \left(\frac{P_a A}{F + P_a A} \right)$$

c) เนื่องจากลูกปอดหลุดออกไปด้วยอัตราเร็วที่สูงกว่าก้านยิ่งมาก จึงสามารถประมาณได้ว่าในช่วงเวลาที่ลูกปอดเคลื่อนที่นั้นก้านยังมีการเคลื่อนที่น้อยมากจนละทิ้งได้ และให้ P_x เป็นความดันในกระบอกขณะที่ลูกปอดลูกแรกเลื่อนจากจุดเดิมเป็นระยะทาง x

$$PL^\gamma = P_x (L+x)^\gamma$$

ใช้กฎของนิวตัน

$$m \frac{d}{dt} v = mv \frac{d}{dx} v = P_x A - P_a A - f$$

$$mv \frac{d}{dx} v = (F + P_a A) \left(\frac{L}{L+x} \right)^\gamma - P_a A - f$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int_0^D \left((F + P_a A) \left(\frac{L}{L+x} \right)^\gamma - P_a A - f \right) dx$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\left(\frac{F + P_a A}{\gamma - 1} \right) \left[L - L^\gamma L + D^{1-\gamma} \right] - f + P_a A D \right)}$$

หมายเหตุ นักเรียนสามารถใช้สมการพลังงานในการหาคำตอบได้เช่นกัน

และหากนักเรียนในกระบวนการแบบอุณหภูมิกคงตัวจะได้คำตอบเป็น

$$mv \frac{d}{dx} v = (F + P_a A) \left(\frac{L}{L+x} \right) - P_a A - f$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int_0^D \left((F + P_a A) \left(\frac{L}{L+x} \right) - P_a A - f \right) dx$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(L(F + P_a A) \ln \left(\frac{L+D}{L} \right) - f + P_a A D \right)}$$

d) สำหรับกระบวนการอะเดียบาติก

$$\frac{d}{dD} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = 0 = (F + P_a A) L^\gamma (L+D)^{-\gamma} - (f + P_a A)$$

$$D = L \left[\left(\frac{F + P_a A}{f + P_a A} \right)^{1/\gamma} - 1 \right]$$

สำหรับกระบวนการอุณหภูมิกคงตัวจะได้

$$\frac{d}{dD} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = 0 = L \frac{(F + P_a A)}{L+D} - (f + P_a A)$$



$$D = L \left[\frac{(F + P_a A)}{(f + P_a A)} - 1 \right]$$

ข้อที่ 3

การให้ความร้อนด้วยการเหนี่ยวนำแม่เหล็ก [9.0 คะแนน]

เฉลย 3)

ก) ในวงกลมรัศมี r ฟลักซ์แม่เหล็กหาได้จาก $\phi = BA$

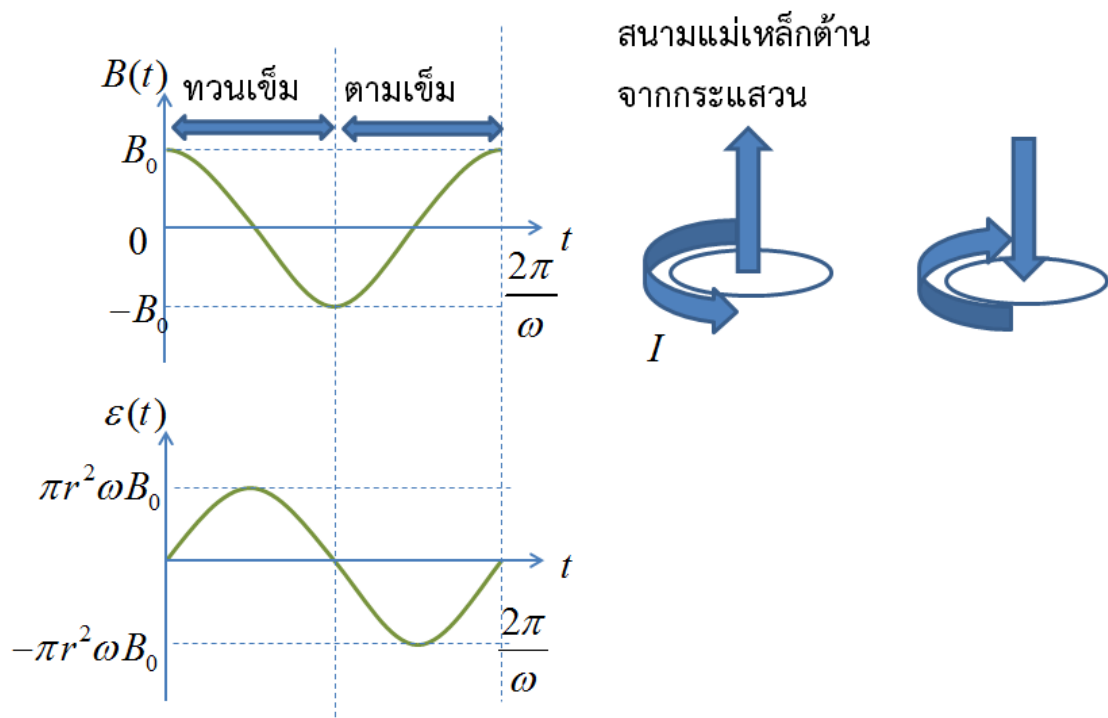
$$\phi(t) = \pi r^2 B_0 \cos \omega t$$

ข) แรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำ (emf อีเอ็มเอฟ)

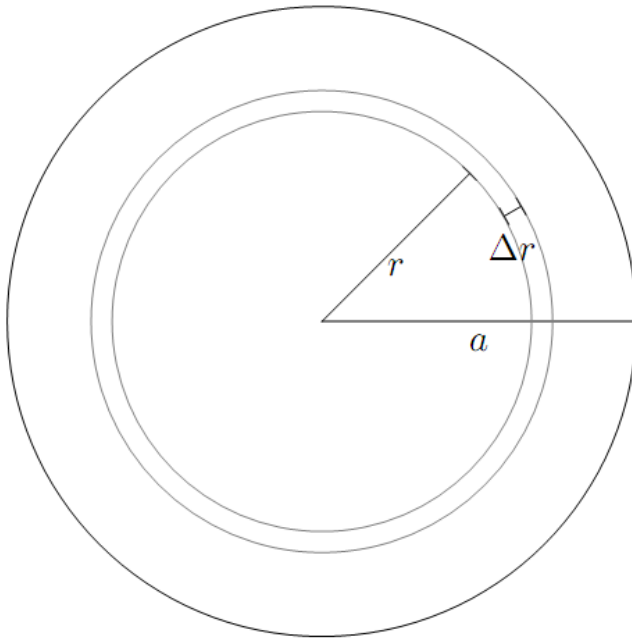
$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = +\pi r^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

ค) พิจารณาทิศจากกฎของเลนซ์หรืออีเอ็มเอฟ



ง)



แบ่งแผ่นทองแดงเป็นวงแหวนซ้อน ๆ กัน แต่ละวงแหวนกว้าง Δr

หาความต้านทานของวงแหวนจาก $R = \frac{\rho l}{A}$ มีค่าเท่ากับ

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho 2\pi r}{z \cdot \Delta r}$$

กำลังไฟฟ้าหาได้จาก $P = \frac{\varepsilon^2}{R}$

$$\Delta P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \left(\pi^2 r^4 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \right) \frac{z \Delta r}{2\rho \pi r}$$

$$\Delta P = \frac{z \pi r^3 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{2\rho} \Delta r$$

อินทิเกรตกำลังที่เสียไปทั้งแผ่นจะได้

$$P = \int_0^a dP = \int_0^a \frac{z \pi r^3 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{2\rho} dr$$

$$P(t) = \frac{z \pi a^4 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{8\rho}$$

หาค่ากำลังเฉลี่ยโดยการ integrate เวลาหนึ่งคาบและหารด้วยคาบ

$$\bar{P} = \frac{\int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} \frac{z \pi a^4 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{8\rho} dt}{2\pi / \omega} = \frac{z \pi a^4 B_0^2 \omega^2}{16\rho}$$