

Solution: Eddy Current and Magnetic Brake

ตอนที่ 1 หาค่าสนามแม่เหล็กของแท่งแม่เหล็ก

[7.0 คะแนน]

ผลการจับเวลาและวัดค่าความต่างศักย์จากการกลิ้งล่อแม่เหล็กลงตามพื้นเอียงที่มีผิวเป็นแถบกาวอะลูมิเนียม เป็นระยะทาง $s = 70 \text{ cm}$ เป็นดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงเวลาและความต่างศักย์ที่ล่อแม่เหล็กกลิ้งลงตามพื้นเอียงเป็นระยะทาง 70 cm โดยปลายหนึ่งของพื้นเอียงสูงจากพื้นเป็นระยะทาง h

$h \text{ (cm)}$	$t \text{ (s)}$				$V \text{ (mV)}$				$a \text{ (m/s}^2\text{)}$	$V^2 \text{ (}\times 10^{-6} \text{ V}^2\text{)}$
	t_1	t_2	t_3	$t \text{ เฉลี่ย}$	V_1	V_2	V_3	$V \text{ เฉลี่ย}$		
3.6	2.47	2.50	2.53	2.50	1.5	1.6	1.5	1.53	0.224	2.35
4.8	2.09	2.03	2.06	2.06	1.7	1.6	1.7	1.67	0.330	2.78
6.0	1.75	1.69	1.75	1.73	1.9	2.0	2.0	1.97	0.468	3.87
8.0	1.56	1.57	1.56	1.56	2.2	2.2	2.3	2.27	0.573	5.14
9.2	1.37	1.40	1.41	1.39	2.5	2.6	2.6	2.57	0.721	6.59
10.4	1.28	1.28	1.30	1.29	2.7	2.8	2.8	2.76	0.846	7.65
11.6	1.22	1.15	1.22	1.20	3.0	3.1	3.0	3.03	0.978	9.20

หมายเหตุ ค่าความเร่งในตารางคำนวณจาก $a = \frac{2s}{t^2}$

นำข้อมูลที่ได้ไปเขียนกราฟระหว่าง a (แกนนอน) กับ V^2 (แกนตั้ง) ได้ผลดังกราฟในรูป 1

จากสมการ $V^2 = 2asB^2 \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{R^2}$ ซึ่งในที่นี้ รัศมีล่อเป็น $R = 9.50 \pm 0.01 \text{ mm}$ และ รัศมีเพลเป็น

$R_0 = 2.60 \pm 0.01 \text{ mm}$ และระยะทางที่ล่อเคลื่อนที่ $s = 70 \text{ cm}$

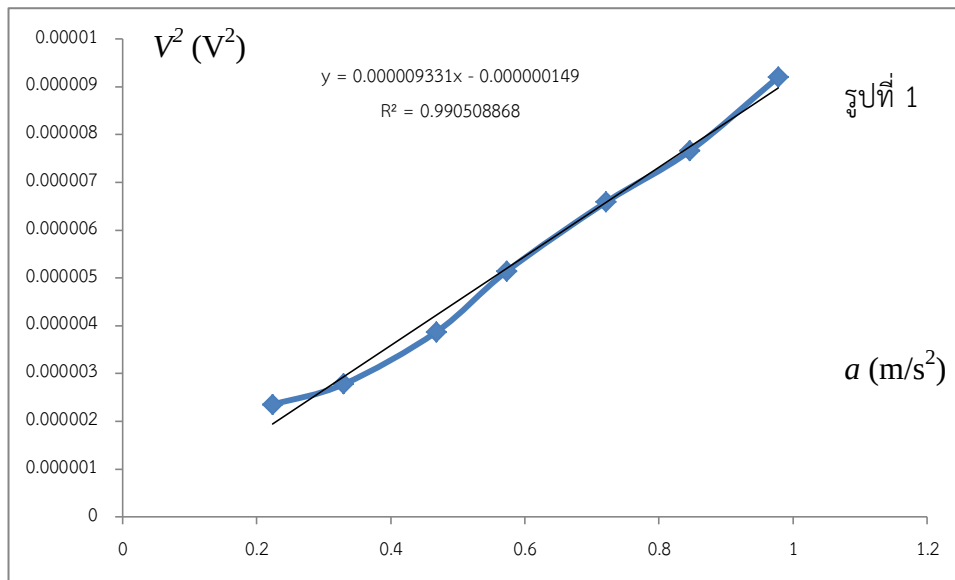
ความชันของกราฟระหว่าง a กับ V^2 เป็น

$$2sB^2 \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{R^2} = 2 \times 0.70 \times (0.00879)^2 B^2 = 0.000108 B^2 = 9.33 \times 10^{-6}$$

$$B^2 = 0.0863 \Rightarrow B = 0.294 \text{ T}$$

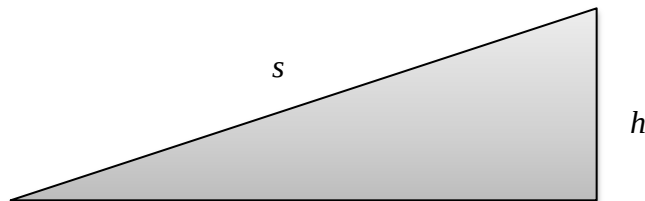
การหาความคลาดเคลื่อนของความชัน จากกราฟจะได้ความชันมีค่าระหว่าง $(7.75-10.13) \times 10^{-6}$

และได้ค่าสนามแม่เหล็กเป็น $(0.29 \pm 0.02) \text{ T}$



ตอนที่ 2 การศึกษาแรงแม่เหล็กจากกระแสไหลวน

[2.0 คะแนน]



ระยะทางที่ให้แท่งแม่เหล็กเคลื่อนที่บนแถบอะลูมิเนียม 50 cm ใช้พื้นเอียงที่มี $s = 70 \text{ cm}$, $h = 25 \text{ cm}$

เวลาที่ใช้ $t_{A1} \approx 1.5 \text{ s}$

ระยะทางที่ให้แท่งแม่เหล็กเคลื่อนที่บนแผ่นฉนวนอะลูมิเนียม 50 cm ใช้พื้นเอียงที่มี $s = 70 \text{ cm}$, $h = 25 \text{ cm}$

เวลาที่ใช้ $t_{A2} \approx 8 \text{ s}$

ระยะทางที่ให้แท่งแม่เหล็กเคลื่อนที่บนแผ่นไม้ 50 cm ใช้พื้นเอียงที่มี $s = 70 \text{ cm}$, $h = 25 \text{ cm}$

เวลาที่ใช้ $t_w \approx 1 \text{ s}$

การเปรียบเทียบเวลา

$$t_{A1} < t_{A2}$$

$$t_{A2} > t_w$$

$$t_{A1} > t_w$$

เหตุผลความแตกต่างของเวลามาจากกระแสไหลวน ความหนาของแผ่นอะลูมิเนียมมาก eddy current มาก เวลาช้าลง ไม่มี สปส ความเสียหายจลน์มากกว่าอะลูมิเนียม เวลาในกรณีของอะลูมิเนียมมากกว่าแสดงว่าผลจาก eddy current มีมากกว่าผลจากแรงเสียดทาน

ตอนที่ 3 การหา damping coefficient

[9.0 คะแนน]

สมการที่จะทำให้หาค่า damping coefficient b และ kinetic friction coefficient μ ได้ คือ จาก

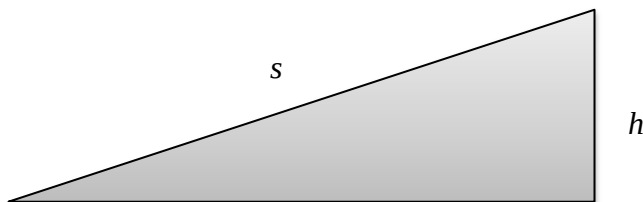
สมการ $m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta - bv - \mu mg \cos \theta$ สามารถแสดงความสัมพันธ์เป็นสมการเชิงเส้นของความเร็วกับมุมเอียงได้เป็น

$$\frac{v_T}{\cos \theta} = \frac{mg}{b} (\tan \theta - \mu)$$

ถ้าเขียนกราฟของ $\frac{v_T}{\cos \theta}$ กับ $\tan \theta$ จะได้เส้นตรงและสามารถหาค่าที่ต้องการได้

จัดพื้นเอียงให้มีความสูงของพื้น ณ ความยาวพื้นเอียง $s = 0.7 \text{ m}$ (วัดจากปลายที่ติดพื้น) ค่าต่างๆ ดังใน

ตาราง 2

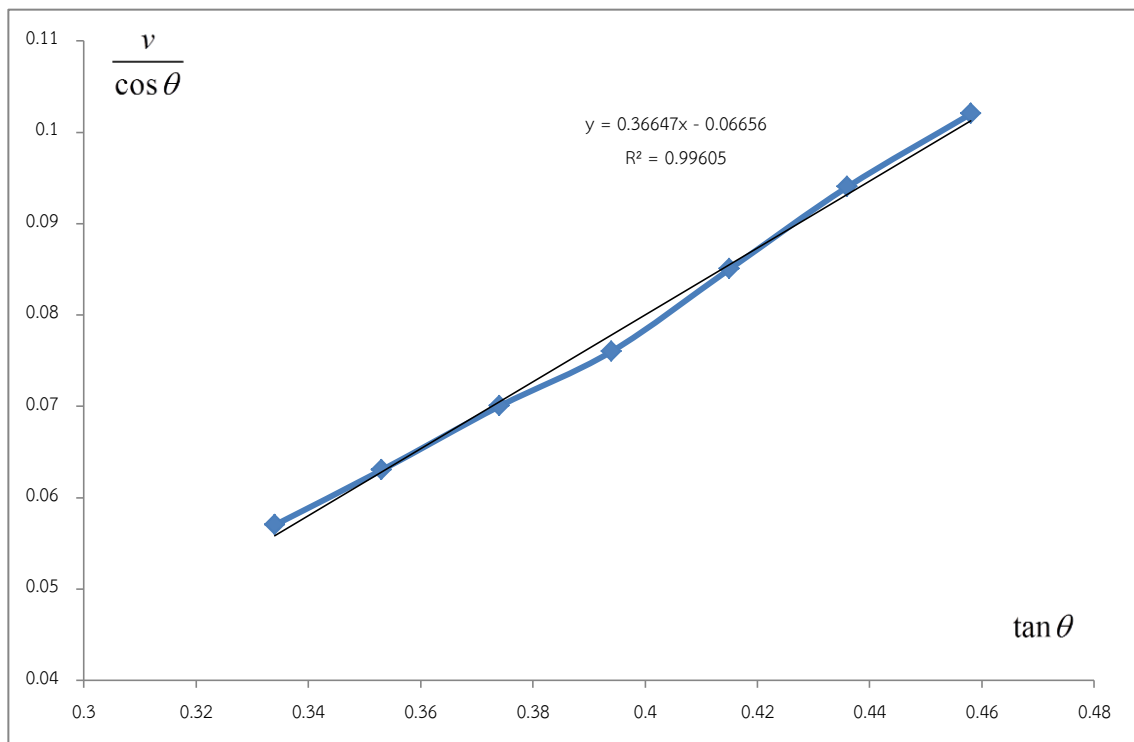


ผลการทดลอง เริ่มจับเวลาเมื่อแท่งแม่เหล็กเคลื่อนที่ลงมาบนแผ่นฉนวนอะลูมิเนียมประมาณ 10 cm หลังจากปล่อย เนื่องจากพบว่าระยะทางหลังจากนั้นใช้เวลาเท่ากันในระยะทางเดียวกัน เช่นในระยะทางทุกๆ 10 cm และจับเวลาการเคลื่อนที่ระยะทาง 20 cm ($\ell = 0.2 \text{ m}$)

ตาราง 2 แสดงค่าเวลาที่แท่งแม่เหล็กเคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียงบนแผ่นฉนวนอะลูมิเนียม โดยมีความสูง h ค่าต่างๆ ณ ตำแหน่งที่ $s = 20 \text{ cm}$

$h \text{ (m)}$	t_1	t_2	t_3	$\bar{t} \text{ (s)}$	$v = \frac{\ell}{t}$ (m/s)	$\sin \theta = \frac{h}{s}$	$\cos \theta$	$\frac{v}{\cos \theta}$	$\tan \theta$
0.240	3.68	3.75	3.65	3.69	0.054	0.317	0.949	0.057	0.334
0.252	3.34	3.30	3.41	3.35	0.060	0.333	0.943	0.063	0.353

0.264	3.00	3.00	3.13	3.04	0.066	0.350	0.937	0.070	0.374
0.276	2.82	2.81	2.90	2.84	0.070	0.367	0.930	0.076	0.394
0.288	2.50	2.52	2.62	2.55	0.079	0.383	0.923	0.085	0.415
0.300	2.35	2.27	2.37	2.33	0.086	0.400	0.917	0.094	0.436
0.312	2.13	2.18	2.19	2.17	0.092	0.417	0.909	0.102	0.458



รูปที่ 2

จากกราฟในรูปที่ 2 ได้ค่าความชัน = 0.366 และ intercept บนแกนตั้ง = -0.0666

$$\text{ดังนั้น } \frac{mg}{b} = 0.366 \Rightarrow b = \frac{mg}{0.366} = \frac{0.171}{0.366} = 0.466 = 0.47 \text{ N.s.m}^{-1} \text{ หรือ } \text{kg.s}^{-1}$$

$$\text{และ } \mu \times \text{slope} = 0.0666 \Rightarrow \mu = \frac{0.0666}{0.366} = 0.182 = 0.18$$

$$\text{ดังนั้น time constant } \tau = \frac{m}{b} = \frac{0.0174}{0.47} = 0.037 \text{ s}$$

การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

ความชันมีค่าระหว่าง 0.342-0.401 ดังนั้น $b = 0.47 \pm 0.03$, $\mu = 0.18 \pm 0.02$

และ ความคลาดเคลื่อนของ $m \approx 1\%$, และของ $b \approx 6\%$ ได้ ความคลาดเคลื่อนของ $\tau \approx 7\%$

ดังนั้น $\tau = 0.037 \pm 0.003s$

กรณีที่ 2

สมการแสดงความสัมพันธ์เป็นสมการเชิงเส้นของความเร็วกับมุมเอียงเป็น

$$\frac{v_T}{\sin \theta} = \frac{mg}{b} - \frac{\mu mg}{b} \cot \theta$$

ถ้าเขียนกราฟของ $\frac{v_T}{\sin \theta}$ กับ $\cot \theta$ จะได้เส้นตรงและสามารถหาค่าที่ต้องการได้

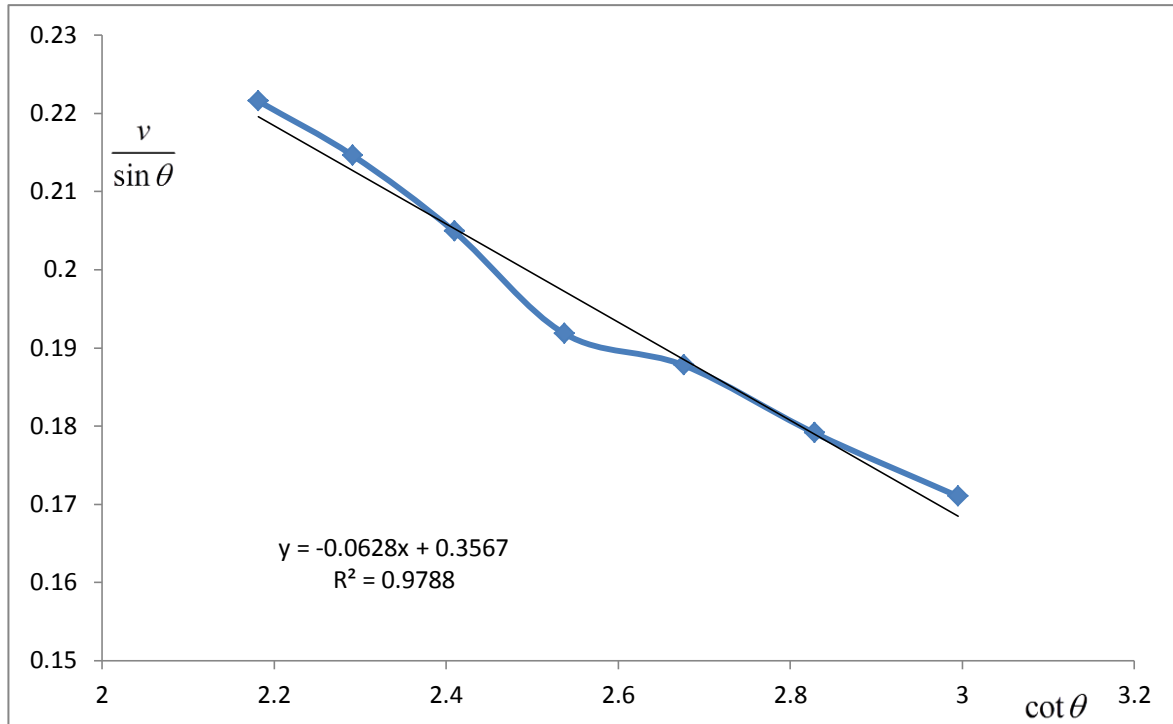
h (m)	t_1	t_2	t_3	$\bar{t}$ (s)	$v = \frac{\ell}{t}$ (m/s)	$\sin \theta = \frac{h}{s}$	$\cos \theta$	$\frac{v}{\sin \theta}$	$\cot \theta$
0.240	3.68	3.75	3.65	3.69	0.054	0.317	0.949	0.171	3.00
0.252	3.34	3.30	3.41	3.35	0.060	0.333	0.943	0.179	2.83
0.264	3.00	3.00	3.13	3.04	0.066	0.350	0.937	0.188	2.68
0.276	2.82	2.81	2.90	2.84	0.070	0.367	0.930	0.192	2.54
0.288	2.50	2.52	2.62	2.55	0.079	0.383	0.923	0.205	2.41
0.300	2.35	2.27	2.37	2.33	0.086	0.400	0.917	0.215	2.29
0.312	2.13	2.18	2.19	2.17	0.092	0.417	0.909	0.222	2.18

จากกราฟในรูปที่ 3 ได้ค่าความชัน = -0.0628 และ intercept บนแกนตั้ง = 0.358

$$\text{ดังนั้น } \frac{mg}{b} = 0.358 \Rightarrow b = \frac{mg}{0.358} = \frac{0.171}{0.358} = 0.478 = 0.48$$

$$\text{และ } \mu = -\frac{\text{slope}}{\text{intercept}} = -\frac{-0.0628}{0.358} = 0.176 = 0.18$$

ดังนั้น time constant $\tau = \frac{m}{b} = \frac{0.0174}{0.478} = 0.036 \text{ s}$



ตอนที่ 4 หาค่าสภาพนำไฟฟ้าของแผ่นฉากระลูมิเนียม รูปที่ 3 [2.0 คะแนน]

จากผลการทดลองตอนที่ 3 ได้ $b = 0.47$ ซึ่ง $b = \sigma \Lambda$

ดังนั้น conductivity ของอะลูมิเนียม คือ $\sigma = \frac{b}{\Lambda} = \frac{0.466}{1.5 \times 10^{-8}} = 3.1 \times 10^7 \text{ S/m}$

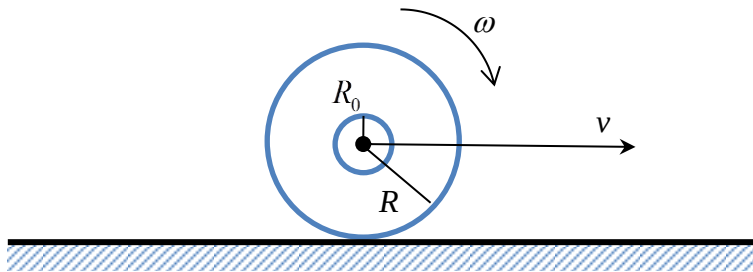
ความคลาดเคลื่อนมาจาก b ดังนั้น $\sigma = (3.1 \pm 0.2) \times 10^7 \text{ S/m}$

เนื่องจาก $\Lambda = kdD^2B^2$ และแผ่นอะลูมิเนียมหนา 1 mm แทนค่าต่างๆ ได้

$$k = \frac{1.5 \times 10^{-8}}{0.001 \times 0.019 \times 0.019 \times 0.294 \times 0.294} = 0.48 \approx 0.5$$

ภาคผนวก

ที่มาของสมการ (1)



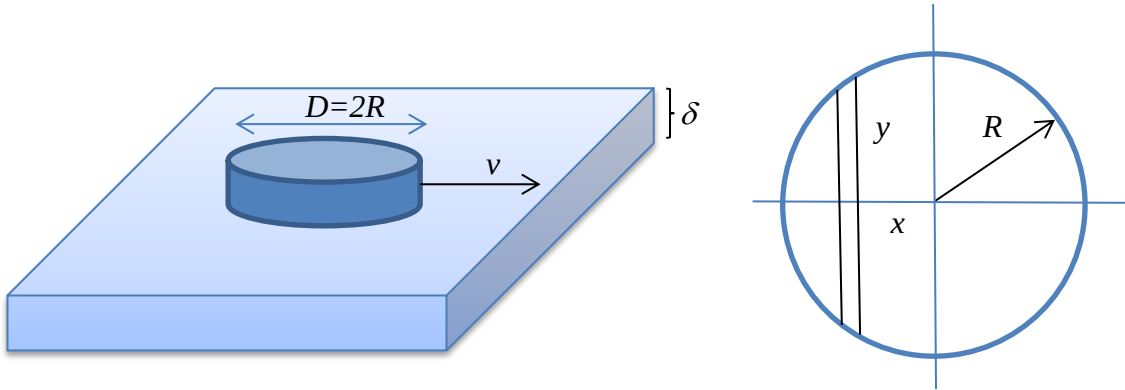
$$\frac{F_B}{q} = vB = \omega RB \quad \text{เมื่อ } v \text{ เป็นความเร็วของล้อ}$$

$$\text{e.m.f } \mathcal{E} = \int \frac{F_B}{q} dR = \int \frac{dW}{q} = \int_{R_0}^R \omega R B dR = \frac{1}{2} \omega B (R^2 - R_0^2)$$

$$V = 2\mathcal{E} = \omega B (R^2 - R_0^2) = \frac{vB}{R} (R^2 - R_0^2) \quad (\text{เลข 2 มาจากการที่มีสองล้อ})$$

$$V^2 = \frac{v^2 B^2}{R^2} (R^2 - R_0^2)^2 = 2asB^2 \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{R^2}$$

ที่มาของสมการ (6)



$$E = \frac{F_B}{q} = vB$$

$$J = \sigma E = \sigma vB$$

$$dI = J\delta dx$$

$$dF_d = B(2y)dI = BJ\delta(2ydx) = BJ\delta dA$$

$$F_d = \frac{B\pi D^2}{4} J\delta = \frac{\pi}{4} B^2 D^2 \sigma v \delta = \sigma \Lambda v, \quad \Lambda = \frac{\pi}{4} \delta D^2 B^2$$

หรือ $\Lambda = k\delta D^2 B^2$

ในกรณีที่แม่เหล็กมีรู ซึ่งเส้นผ่าศูนย์กลางเป็น αD และ $\alpha < 1$ จะได้

$$F'_d = \frac{\pi}{4} B^2 D^2 \sigma v \delta - \frac{\pi}{4} B^2 (\alpha D)^2 \sigma v \delta = \frac{\pi}{4} (1 - \alpha^2) B^2 D^2 \sigma v \delta = \Lambda' \sigma v$$

โดยที่ $\Lambda' = \frac{\pi}{4} (1 - \alpha^2) B^2 D^2 \delta \approx 2 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{S}^{-1}$ สำหรับแท่งแม่เหล็กที่ใช้ในการทดลองนี้

และ $k = \frac{\pi}{4} (1 - \alpha^2) \approx 0.7$

ถ้าคิดว่าเส้นผ่าศูนย์กลางของรูเป็น 10 mm จะได้ $\Lambda \approx 1.7 \times 10^{-8}$, $k \approx 0.56$