

เฉลยข้อที่ 1

เฉลยข้อ (1.1)

ก) จงหาว่าจุดศูนย์กลางมวลของท่อนไม้ CD มีอัตราเร็วในแนวแกน X และ Y เป็นเท่าใด

ใช้กรอบ BC แล้ว ความเร็วของกรอบเป็น u ทิศแกน Y

แตกความเร็วในแกน X และ Y

แล้วหาจากความเร็วสัมพันธ์ในแต่และแกน

$$v_x = \frac{l}{2} \omega \sin \theta$$

$$v_y = u - \frac{l}{2} \omega \cos \theta$$

ข) ให้พิจารณาการเคลื่อนที่ของท่อนไม้ CD รอบจุดหมุนที่เหมาะสม แล้วจงหาว่าอัตราเร็วเชิงมุม ω มีค่าสัมพันธ์กับอัตราเร็ว u อย่างไร

วิธีที่ 1 เลือกจุดหมุนรอบ C ในกรอบนิ่ง เนื่องจากแรงกระทำผ่านที่ C และโมเมนต์เชิงมุมเดิมเป็นศูนย์ ผลรวมโมเมนต์เชิงมุมใหม่จึงเป็นศูนย์

$$\tau \delta t = \delta L$$

$$0 = I_{cm} \omega + L_{orbital}$$

$$0 = \frac{1}{12} m l^2 \omega - m(u - \frac{l}{2} \omega \cos \theta) \frac{l}{2} \cos \theta + m \omega \frac{l^2}{4} \sin^2 \theta$$

$$m u \frac{l}{2} \cos \theta - m \omega \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} m l^2 \omega$$

$$u \cos \theta = \frac{2}{3} \omega l$$

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{u}{l} \cos \theta$$

วิธีที่ 2 เลือกจุดหมุนรอบ C ในกรอบอ้างอิงของ BC

จะเห็นจุดศูนย์กลางมวลของ BC มีแรงกระทำทำให้เพิ่มโมเมนต์มกตกลงมาแนวตั้งจนมีความเร็ว u ในเวลา δt ทอร์ก

$$\tau \delta t = \delta L$$

$$m \frac{u}{\delta t} \frac{l}{2} (\cos \theta) \delta t = I_B \omega$$

$$m u \frac{l}{2} \cos \theta = \frac{1}{3} m l^2 \omega$$

$$u \cos \theta = \frac{2}{3} \omega l$$

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{u}{l} \cos \theta$$

วิธีที่ 3 เลือกจุดหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล ในกรอบนี้

หาโมเมนตัมเชิงมุม จากทอร์ก จากแรงที่กระทำกับ CD ที่จุด C ในแนวแกน X และแกน Y

$$\tau \delta t = \delta L$$

$$F_y \delta t \frac{l}{2} \cos \theta - F_x \delta t \frac{l}{2} \sin \theta = I_{cm} \omega$$

$$mv_y \frac{l}{2} \cos \theta - mv_x \frac{l}{2} \sin \theta = I_{cm} \omega$$

$$m(u - \frac{l}{2} \omega \cos \theta) \frac{l}{2} \cos \theta - m\omega \frac{l^2}{4} \sin^2 \theta = \frac{1}{12} ml^2 \omega$$

$$mu \frac{l}{2} \cos \theta - m\omega \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} ml^2 \omega$$

$$u \cos \theta = \frac{2}{3} \omega l$$

$$\omega = \frac{3u}{2l} \cos \theta$$

ค) หากการดล (impulse) ทั้งหมดเนื่องจากแรง F เท่ากับ J จงหา J ในรูปของ m, u, θ

J = การเปลี่ยนโมเมนตัมในแนวแกน y

$$= mu + 2mv_y$$

$$= mu + 2 \left(u - \frac{l}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{u}{l} \cos^2 \theta \right) m \text{ ยกมาจากข้อ ก)}$$

$$= 3mu - \frac{3}{2} mu \cos^2 \theta$$

$$J = 3mu \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{2} \right)$$

เฉลยข้อที่ (1.2)

- ก) ถ้าล้าอากาศที่ตกกระทบอุกกาบาตหยุดนิ่งหลังจากตกกระทบ แล้วอากาศจะมีความดันขณะหยุดนิ่งเป็นเท่าใด

$$P = P_a + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$F = (P - P_a)A$$

$$F = -\frac{1}{2} \rho A v^2 = -\frac{1}{2} \rho \pi r^2 v^2$$

เครื่องหมาย - แสดงถึงแรงต้าน

(หมายเหตุ คิดจากการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ก็ให้คะแนนเต็มเหมือนกัน)

$$\text{นิยามแรง } F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$$

มวลอากาศที่ชนในเวลา Δt เป็น $\rho A v \Delta t$

ให้ชนแล้ว “ความเร็ว” มวลอากาศเป็นศูนย์

$$F = \frac{(\rho A v \Delta t) v}{\Delta t} = \rho \pi r^2 v^2$$

- ข) โดยทั่วไปอากาศด้านหน้าอุกกาบาตไม่ได้หยุดนิ่งทั้งหมด ทำให้แรงต้านที่แท้จริงของอุกกาบาตมีขนาดเป็น C_d เท่าของแรงในข้อ ก) จงหาความเร่งของอุกกาบาตภายใต้แรงต้านนี้

$$\frac{d}{dt} v = -\frac{1}{2} C_d \frac{\rho}{m} \pi r^2 v^2$$

- ค) สำหรับอุกกาบาตที่เคลื่อนที่เข้ามาในบรรยากาศโลกด้วยอัตราเร็วต้น u ทำมุม θ กับแนวระดับจะมี

อัตราเร็วที่ความสูง z เป็นไปตามสมการ $v = u e^{ae^{bz}}$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว จงหาค่าของ a และ b ในรูปของ $C_d, \rho_0, r, \alpha, m$ และ θ

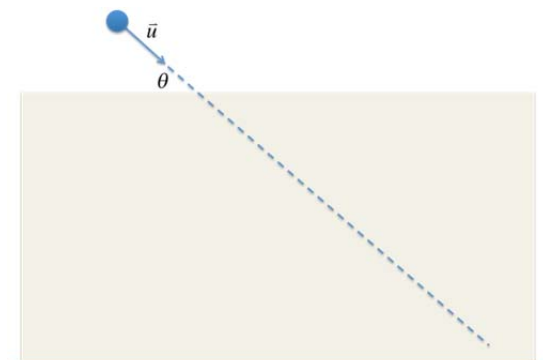
$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{C_d}{2} \rho \pi r^2 v^2$$

$$-m v \frac{dv}{ds} = -\frac{C_d}{2} \rho_0 e^{-\alpha z} \pi r^2 v^2$$

$$\frac{-m \sin \theta}{v} \frac{dv}{dz} = -\frac{C_d}{2} \rho_0 e^{-\alpha z} \pi r^2$$

$$2m \sin \theta \ln \frac{v}{u} = -\frac{C_d \pi r^2 \rho_0}{\alpha} e^{-\alpha z}$$

$$v = u e^{-\frac{C_d \pi r^2 \rho_0}{2 \alpha m \sin \theta} e^{-\alpha z}}$$



จะได้ $a = -\frac{C_d \pi r^2 \rho_0}{2\alpha m \sin \theta}, b = -\alpha$

ง) จงประมาณว่าอุกกาบาตจะสว่างมากที่สุดที่ความสูง $h_{\max}$ เท่าใด

ตอบ:

อัตราการสูญเสียพลังงานที่ความสูงต่างๆ

$$Power = Fv$$

$$= \frac{C_d}{2} \rho \pi r^2 v^3$$

$$= \frac{C_d}{2} \rho_0 \pi r^2 u^3 e^{-\alpha z} e^{-\frac{3C_d \pi r^2 \rho_0}{2\alpha m \sin \theta} e^{-\alpha z}}$$

$$Power(z) = \frac{C_d}{2} \rho_0 \pi r^2 u^3 e^{-\left(\alpha z + \frac{3C_d \pi r^2 \rho_0}{2\alpha m \sin \theta} e^{-\alpha z}\right)}$$

ประมาณว่าอุกกาบาตสว่างที่สุด เมื่อมีการสูญเสียพลังงานสูงที่สุด

นั่นคือเมื่อเทอม $R(z) = \alpha z + \frac{3C_d \pi r^2 \rho_0}{2\alpha m \sin \theta} e^{-\alpha z}$ มีค่าต่ำสุด

$$\frac{dR}{dz} = 0 \rightarrow \alpha - \frac{3C_d \pi r^2 \rho_0}{2m \sin \theta} e^{-\alpha z_{\max}} = 0$$

$$z_{\max} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{3C_d \pi r^2 \rho_0}{2\alpha m \sin \theta} \right)$$

จ) ที่ความสูง $z_{\max}$ ถ้าอุกกาบาตจะยังไม่แตกตัว วัสดุของอุกกาบาตจะต้องทนความดันได้สูงสุด P เท่าใด

ตอบ:

แทนค่า v ลงในสมการจากข้อ ข)

$$P = \frac{C_d}{2} \rho v^2 + P_a$$

$$\approx \frac{C_d}{2} \rho v^2$$

$$= \frac{C_d}{2} \rho_0 v^2 e^{-\alpha z_{\max}}$$

$$= \frac{C_d}{2} \rho_0 u^2 e^{-\frac{C_d \pi r^2 \rho_0}{\alpha m \sin \theta} e^{-\alpha z_{\max}}} e^{-\alpha z_{\max}}$$

$$= \frac{1}{2} C_d \rho_0 u^2 \exp \left(-\left(\frac{C_d \pi r^2 \rho_0}{\alpha m \sin \theta} e^{-\alpha z_{\max}} + \alpha z_{\max} \right) \right)$$

เฉลยคำตอบข้อที่ 2

- ก) จงหาความดันสุดท้ายของกระบอกสูบ B

ตอบ:

ในสมดุลความดันสุดท้ายของสองกระบอกต้องเท่ากัน โดยเท่ากับน้ำหนักมวลที่กด

$$P = \frac{mg}{a}$$

- ข) จงหาปริมาตรสุดท้ายของก๊าซที่อยู่ในกระบอกสูบ B

ตอบ: ให้สปริงหดลงเป็นระยะ x จะได้ว่า

สมดุลแรงสปริงเท่ากับแรงดันสุดท้ายจากก๊าซ

$$kx = Pa$$

$$V_B = ax = \frac{Pa^2}{k} = \frac{mga}{k}$$

- ค) จงหาปริมาตรที่ลดลงในกระบอกสูบ A

ตอบ:

$$\frac{\Delta V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$$

$$\Delta V_A = V_B \frac{T_A}{T_B}$$

- ง) จงหางานของแรงกดที่ทำให้กับก๊าซในกระบอกสูบ A

ตอบ: ในสมดุลความดันใน A คงตัวตลอดกระบวนการ

$$W_A = P\Delta V_A$$

- จ) จงหาขนาดของงานที่ลูกสูบได้รับจากก๊าซในกระบอกสูบ B

ตอบ:

$$\begin{aligned} W_B &= \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{P^2 a^2}{k} \\ &= \frac{1}{2} P V_B \end{aligned}$$

ฉ) จงหาว่าพลังงานภายในของก๊าซหลังการถ่ายเทจะเปลี่ยนไปเท่าใด

ตอบ:

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} PV$$

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1} P(V_B - \Delta V_A)$$

ช) จงหาอัตราส่วน $\frac{T_B}{T_A}$ ในรูปของ γ

ตอบ:

$$P\Delta V_A - \frac{1}{2}PV_B = \frac{1}{\gamma - 1} P(V_B - \Delta V_A)$$

$$PV_B \left(\frac{T_A}{T_B} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} PV_B - \frac{1}{\gamma - 1} P \frac{V_B T_A}{T_B}$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1} PV_B \left(1 - \frac{T_A}{T_B} \right)$$

$$\frac{T_A}{T_B} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{T_A}{T_B}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}$$

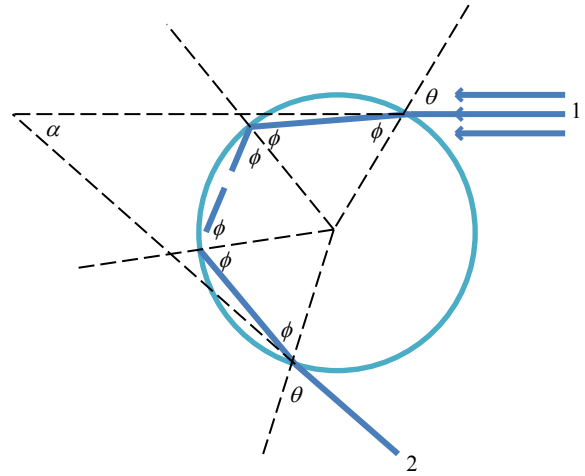
$$2\gamma \frac{T_A}{T_B} = \gamma + 1$$

$$T_B = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} T_A$$

เฉลยคำตอบข้อที่ 3

จากรูปรังสีแสง 1 จากดวงอาทิตย์ตกกระทบหยดน้ำทรงกลมด้วยมุมตกกระทบเป็น θ และหักเหเข้าไปในหยดน้ำเป็นมุม ϕ และสะท้อนภายในหยดน้ำหลายครั้งก่อนที่จะหักเหออกจากหยดน้ำเป็นเส้นรังสี 2 เข้าหาผู้สังเกต

ให้มุมเบี่ยงเบนระหว่างรังสี 1 และรังสี 2 เป็น α และจำนวนครั้งของการสะท้อนของรังสีภายในหยดน้ำคือ N และหยดน้ำมีดัชนีหักเหสำหรับเส้นรังสีแสงดังกล่าวเป็น n



ก) จงแสดงว่ามุม α มีความสัมพันธ์กับ ϕ , θ และ N ดังนี้

ตอบ:

จากกฎการหักเห รังสีที่ออกมาทำมุม θ กับเส้นตั้งฉากกับผิว

การหักเหและการสะท้อนภายในแต่ละครั้ง เส้นตั้งฉากกับผิวมีมุมที่จุดศูนย์กลางเปลี่ยนไป $\pi - 2\phi$ และเพิ่มขึ้นตามจำนวนการสะท้อน มุมที่จุดศูนย์กลางหยดที่เส้นตั้งฉากที่เบี่ยงเบน (ทิศทวนเข็มนาฬิกา) ไปทั้งหมดเป็น $(N+1)(\pi - 2\phi)$ (บวกหนึ่งมาจากการจะต้องมีการหักเหอีกครั้งเมื่อรังสีออกจากหยดน้ำ) คิดรวมมุมที่เบี่ยงเบนเพิ่มอีก (2θ) จะได้มุมที่เหลือ

$$\alpha = 2\pi - (N+1)(\pi - 2\phi) - 2\theta$$

ข) รังสีจำนวนหนึ่งที่อยู่ใกล้กันและขนานกันมาจากดวงอาทิตย์จะตกกระทบด้วยมุม θ ที่ต่างกันเล็กน้อย ตามตำแหน่งตกกระทบบนผิวหยดน้ำ ซึ่งจะส่งผลให้มุมหักเห ϕ และมุมเบี่ยงเบน α แตกต่างกันไปเล็กน้อย เมื่อรังสีตกกระทบที่อยู่ใกล้กันมีความแตกต่างของมุมตกกระทบเป็น $\Delta\theta$ มีมุมหักเหต่างกัน $\Delta\phi$ และมีมุมเบี่ยงเบนต่างกัน $\Delta\alpha$ ซึ่งผลต่างเหล่านี้มีค่าน้อยๆ

จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\alpha$

ตอบ: $\Delta\alpha = 2(N+1)\Delta\phi - 2\Delta\theta$

ค) จงหาเงื่อนไขของ $\frac{\Delta\phi}{\Delta\theta}$ ที่ทำให้รังสีเบี่ยงเบน 2 มีความเข้มมากที่สุด

ตอบ: $\Delta\alpha \rightarrow 0$ แสดงจากช่วง $\Delta\theta$ ไปรวมกันที่ความเข้มเดียว

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} = \frac{1}{N+1}$$

ง) แสดงมุม θ และ ϕ ที่ทำให้เกิดการเบี่ยงเบนด้วยความเข้มสูงสุด

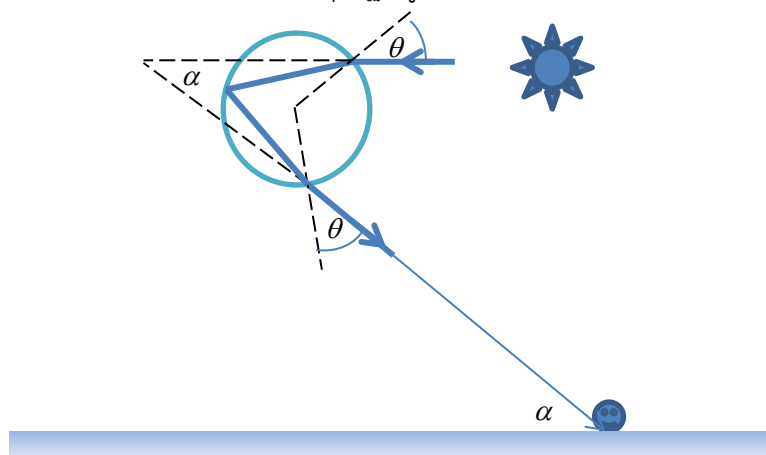
ตอบ:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= n \sin \phi, \quad \frac{d}{d\theta} \phi = \frac{\cos \theta}{n \cos \phi}, \Rightarrow \frac{\cos \theta}{n \cos \phi} = \frac{1}{N+1} \\ \cos^2 \theta &= \frac{n^2 \cos^2 \phi}{(N+1)^2}, \Rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{n^2 \cos^2 \phi}{(N+1)^2} + n^2 \sin^2 \phi = 1 \\ 1 &= \frac{n^2 \cos^2 \phi}{(N+1)^2} + n^2 - n^2 \cos^2 \phi \\ \cos \phi &= \frac{N+1}{n} \sqrt{\frac{n^2-1}{(N+1)^2-1}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{n^2-1}{(N+1)^2-1}} \\ \phi &= \cos^{-1} \left(\frac{N+1}{n} \sqrt{\frac{n^2-1}{(N+1)^2-1}} \right) \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{n^2-1}{(N+1)^2-1}} \right)\end{aligned}$$

จ) จงหาค่ามุมเบี่ยงเบน α เป็นตัวเลขสำหรับการเกิดรุ้งที่มีการสะท้อนภายในหนึ่งครั้ง (รุ้งปฐมภูมิ) สำหรับหยดน้ำที่มีดัชนีหักเห 1.33

ตอบ: $\theta = 59.6^\circ$, $\phi = 40.4^\circ$, $\alpha = 42.4^\circ$

ฉ) จงเขียนแผนภาพเส้นทางของแสงของการเกิดรุ้งปฐมภูมิผ่านหยดน้ำ



- ข) จงหาช่วงของค่ามุมเบี่ยงเบนที่เป็นไปได้ของการสะท้อนภายในหนึ่งครั้ง
ช) จงหาว่าการเกิดรุ้งปฐมภูมินั้นจะทำให้มองเห็นท้องฟ้าภายในวงรุ้งมีความสว่างมากหรือน้อยกว่าท้องฟ้าภายนอกวงรุ้ง

ตอบ:

วิธีที่ 1) จากข้อ ข) ได้ตั้งเงื่อนไขไว้ว่า $\frac{d\alpha}{d\theta} = 0$

มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นเมื่อมุมตกกระทบ $\theta = 0$ ได้ $\alpha = 0$ และเพิ่มขึ้นไป จึงแสดงว่าค่า $\alpha = 42.4^\circ$ เป็นค่ามุม maximum

ดังนั้นมุมเบี่ยงเบน α จะอยู่ในช่วง 0° ถึง 42.4°

เมื่อเพิ่ม θ ไปอีกมุม α ก็จะลดลงมา ทำให้มุม $\alpha < 42.4^\circ$ (ด้านใน) จะมีแสงส่องไปมากกว่าด้านที่มุมสูงกว่า

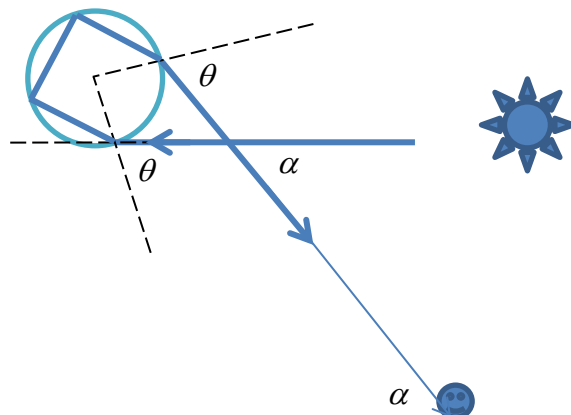
ทำให้ท้องฟ้าภายในวงรุ้งสว่างขึ้นกว่าท้องฟ้าด้านนอกวง

วิธีที่ 2) วิเคราะห์ $\frac{d^2}{d\theta^2}\phi = \frac{-\sin\theta}{n\cos\phi} + \frac{\cos^2\theta\sin\phi}{n^2\cos^3\phi} < 0$ ซึ่งจะสัมพันธ์กับ $\frac{d^2\alpha}{d\theta^2}$ แสดงว่าการเบี่ยงเบน $\alpha = 42.4^\circ$ นี้เป็น maximum

- ณ) จงหาค่ามุมเบี่ยงเบน α เป็นตัวเลขสำหรับการเกิดรุ้งที่มีการสะท้อนภายในสองครั้ง (รุ้งทุติยภูมิ) สำหรับหยดน้ำที่มีดัชนีหักเห 1.33

ตอบ: $\theta = 71.9^\circ$, $\phi = 45.6^\circ$, $\alpha = -50.2^\circ$

- ญ) จงเขียนแผนภาพเส้นทางของแสงของการเกิดรุ้งทุติยภูมิผ่านหยดน้ำโดยแสดงทิศของแสงอาทิตย์ การสะท้อนภายในหยดน้ำ มุมที่รุ้งปรากฏ ตำแหน่งผู้สังเกต และแสดงมุม
จากการคำนวณได้ค่ามุมเบี่ยงเบนเป็นลบ แสดงว่าการหักเหที่เกิดขึ้นจริงจะเป็นการตกกระทบใต้ระดับจุดศูนย์กลางของหยดน้ำ จึงจะได้การเบี่ยงเบนที่มุม $\alpha = 50.2^\circ$ โดยดวงอาทิตย์อยู่ด้านหลังผู้สังเกต



ก) จงหาว่าการเกิดรุ้งทุติยภูมินั้นจะทำให้มองเห็นท้องฟ้าภายในวงรุ้งมีความสว่างเทียบกับท้องฟ้าภายนอกวงรุ้งอย่างไร

ตอบ:

วิธีที่ 1) วิเคราะห์
$$\frac{d^2}{d\theta^2} \phi = \frac{-\sin \theta}{n \cos \phi} + \frac{\cos^2 \theta \sin \phi}{n^2 \cos^3 \phi} < 0$$

จะสัมพันธ์กับ $\frac{d^2 \alpha}{d\theta^2}$ แสดงว่าการเบี่ยงเบนนี้เป็น maximum ของมุม α ที่ค่าเป็นลบ ดังนั้นถ้าคิด α

จุดนี้กลายเป็น minimum

วิธีที่ 2) มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นเมื่อมุมตกกระทบ $\theta = 0^\circ$ ได้ $\alpha = 180^\circ$

ดังนั้นมุมเบี่ยงเบนจะอยู่ในช่วง 50.2° ถึง 180°

นั่นคือเมื่อเพิ่ม θ มุมเบี่ยงเบนจะค่อยๆ ลดลงมาจาก $\alpha > 50.2^\circ$ แล้วก็ย้อนกลับขึ้นไป จะทำให้ท้องฟ้าภายนอกวงรุ้งสว่างขึ้นกว่าท้องฟ้าปกติ จึงเกิดแถบมืดระหว่างรุ้งปฐมภูมิและรุ้งทุติยภูมิ
