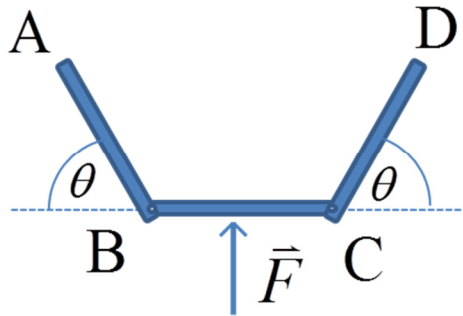


ข้อที่ 1 กลศาสตร์ [11.0 คะแนน]

1.1) การติดท่อนไม้ 3 ท่อน [5.0 คะแนน]



ท่อนไม้สม่ำเสมอ มวล m ยาว l จำนวน 3 ท่อนยึดต่อกันด้วยจุดหมุนที่ B และ C ซึ่งสามารถหมุนได้อย่างอิสระไม่มีความฝืด ดังรูป ท่อนไม้ทั้ง 3 วางราบนิ่งอยู่บนพื้นลื่น (ไม่ต้องคิดแรงเสียดทาน) โดยมีท่อน AB และ CD วางทำมุม θ กับท่อน BC

เมื่อออกแรงดัด ที่กึ่งกลางท่อน BC ในทิศตั้งฉากกับท่อนไม้ การดล (impulse) ของแรงดัดจะส่งผลให้ท่อน BC เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u ในกรอบอ้างอิงบนท่อนไม้ BC จะเห็นท่อน AB และ CD หมุนรอบปลาย B และ C ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω

กำหนดให้ทิศของแรงดัดเป็นทิศของแกน Y และทิศขวามือเป็นทิศของแกน X

ก) จงหาว่าจุดศูนย์กลางมวลของท่อนไม้ CD มีอัตราเร็วในแนวแกน X และ Y เป็นเท่าใด เทียบกับพื้น

[1.8 คะแนน]

ข) ให้พิจารณาการเคลื่อนที่ของท่อนไม้ CD รอบจุดอ้างอิงที่เหมาะสม แล้วจงหาว่าอัตราเร็วเชิงมุม ω มีค่าสัมพันธ์กับอัตราเร็ว u อย่างไร

[2.0 คะแนน]

ค) จงหาการดล (impulse) ของแรง F ในรูปของ m, u, θ

[1.2 คะแนน]

(คำแนะนำ โมเมนต์ความเฉื่อยของท่อนไม้รอบจุดศูนย์กลางมวลเป็น $I = \frac{1}{12}ml^2$)

1.2) การตกของอุกกาบาต [6.0 คะแนน]

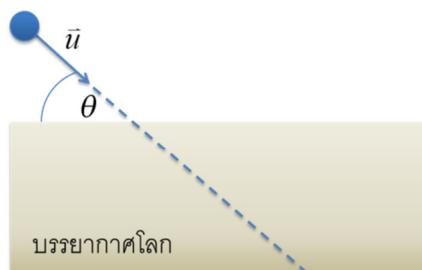
อุกกาบาตที่พุ่งเข้าสู่ชั้นบรรยากาศโลกจะกระทบอากาศ โดยด้านหน้าอุกกาบาตจะมีความดันสูงกว่าด้านหลัง ผลต่างของความดันนี้ทำให้เกิดแรงต้านและอุกกาบาตมีอัตราเร็วลดลง หากความดันด้านหน้าของอุกกาบาตมีค่ามากกว่าความดันวิกฤติค่าหนึ่งอุกกาบาตอาจจะแตกและถูกบีบให้ขยายตัวออกด้านข้างจนมีรูปร่างเหมือนแผ่นเค้ก กำหนดให้ความหนาแน่นของอากาศขึ้นกับความสูง z จากพื้นดินตามสมการ $\rho(z) = \rho_0 e^{-\alpha z}$

สำหรับอุกกาบาตทรงกลมมวล m รัศมี r เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ในอากาศที่มีความหนาแน่น ρ นั้น ความดันหน้าอุกกาบาตจะหาได้โดยพิจารณาว่ากระแสอากาศอัตราเร็ว v พุ่งเข้าหาอุกกาบาตที่อยู่นิ่ง ไม่ต้องพิจารณาแรงเนื่องจากน้ำหนักของอุกกาบาต

ก) ถ้าลำอากาศพุ่งเข้ามาหาอุกกาบาตแล้วหยุดนิ่งเทียบกับอุกกาบาต อากาศด้านหน้าอุกกาบาตจะมีความดันเป็นเท่าใด และจงหาแรงที่กระทำกับอุกกาบาต [1.5 คะแนน]

ข) โดยทั่วไปอากาศด้านหน้าอุกกาบาตไม่ได้หยุดนิ่งทั้งหมด ทำให้แรงต้านที่แท้จริงของอุกกาบาตมีขนาดเป็น C_d เท่าของแรงในข้อ ก) จงหาความเร่งของอุกกาบาตภายใต้แรงต้านนี้ [0.8 คะแนน]

สำหรับอุกกาบาตที่เคลื่อนที่เข้ามาในบรรยากาศโลกด้วยอัตราเร็วต้น u ทำมุม θ กับแนวระดับจะมีอัตราเร็วที่ความสูง z เป็นไปตามสมการ $v = u \cdot e^{a \cdot e^{bz}}$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว



ค) จงหาค่าของ a และ b ในรูปของ $C_d, \rho_0, r, \alpha, m$ และ θ [1.2 คะแนน]

ง) จงประมาณว่าอุกกาบาตจะสว่างมากที่สุดโดยยังไม่แตกตัวที่ความสูง $z_{\max}$ เท่าใด [1.8 คะแนน]

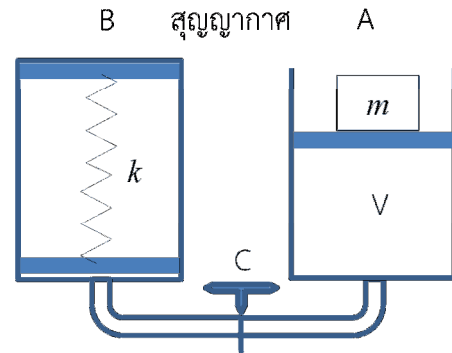
จ) ที่ความสูง $z_{\max}$ วัสดุของอุกกาบาตจะต้องทนความดันได้สูงสุด P ได้อย่างน้อยเท่าใดจึงจะไม่แตกตัว [0.7 คะแนน]

คำแนะนำ นักเรียนอาจใช้ความสัมพันธ์

$$\int e^{-\alpha x} dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + C, \quad \int \frac{1}{v} dv = \ln v + C \quad \text{และ} \quad \frac{dv}{dt} = -\sin \theta \, v \frac{dv}{dz}$$

ข้อที่ 2 การถ่ายเทก๊าซผ่านวาล์ว [8.0 คะแนน]

กระบอกสูบ A มีพื้นที่หน้าตัด a บรรจุก๊าซอุดมคติปริมาตร V ที่มีค่า $\gamma = 1.4$ อยู่เต็ม ด้านบนเป็นลูกสูบเบาที่มีก่อนมวล m ทับอยู่ ลูกสูบสามารถเลื่อนขึ้น-ลงได้โดยไม่มีแรงเสียดทาน ด้านล่างมีท่อขนาดเล็กมากเชื่อมต่อไปยังกระบอกสูบ B ผ่านวาล์ว C ซึ่งปิดอยู่ และระบบทั้งหมดวางอยู่ในสุญญากาศ ภายใต้ความโน้มถ่วง g ที่ผิวโลก



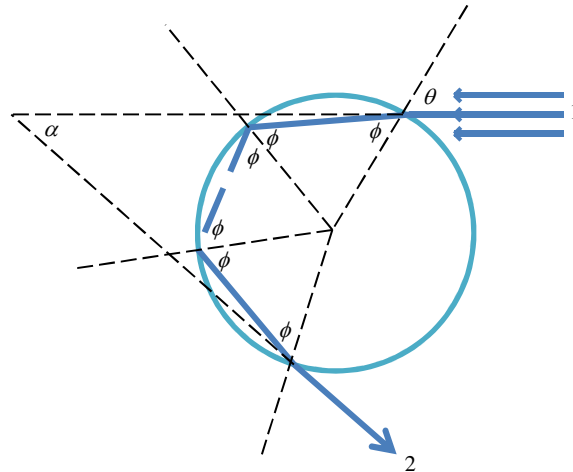
กระบอกสูบ B พื้นที่หน้าตัด a เช่นกัน มีลูกสูบเบาติดอยู่ที่ปลายด้านล่างของสปริงเบามีค่าคงตัว k ความยาวธรรมชาติของสปริงเท่ากับ ความสูงของกระบอกสูบ กระบอกสูบ B เป็นสุญญากาศในตอนเริ่มต้น ทุกส่วนของกระบอกสูบและท่อเป็นฉนวนความร้อน เมื่อเปิดวาล์วเล็กน้อยและปล่อยให้ก๊าซไหลจากกระบอกสูบ A ไปยังกระบอกสูบ B อย่างช้าๆ การเปิดวาล์วเล็กน้อยนี้จะทำให้ความดันก๊าซแต่ละกระบอกสูบเป็นอิสระต่อกัน (นั่นคือไม่จำเป็นต้องเท่ากันในช่วงที่ก๊าซไหล) ก๊าซจะไหลจากกระบอกสูบ A ไปยังกระบอกสูบ B จนกระทั่งก๊าซหยุดไหลผ่านวาล์ว

ถ้าก๊าซในกระบอกสูบ A มีอุณหภูมิคงตัว T_A ให้หาว่าหลังจากการไหลของก๊าซสิ้นสุดลงแล้วก๊าซในกระบอกสูบ B จะมีอุณหภูมิ T_B เป็นเท่าใด โดยทำตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- จงหาความดันสุดท้าย P_B ของกระบอกสูบ B [1.5 คะแนน]
- จงหาปริมาตรสุดท้าย V_B ของก๊าซที่อยู่ในกระบอกสูบ B [1.5 คะแนน]
- จงหาปริมาตรที่ลดลงไปจากกระบอกสูบ A ในรูปของ T_A , T_B และ V_B [1.0 คะแนน]
- จงหางานของแรงกดที่ทำให้กับก๊าซในกระบอกสูบ A [1.0 คะแนน]
- จงหาขนาดของงานที่ลูกสูบได้รับจากก๊าซในกระบอกสูบ B [1.0 คะแนน]
- จงหาว่าพลังงานภายในของก๊าซหลังการถ่ายเทจะเปลี่ยนไปเท่าใด [0.5 คะแนน]
- จงหาอัตราส่วน $\frac{T_B}{T_A}$ ในรูปของ γ [1.5 คะแนน]

$$(\text{นักเรียนสามารถใช้ความสัมพันธ์พลังงานภายใน } U = \frac{1}{\gamma - 1} PV)$$

ข้อที่ 3 รุ้งกินน้ำ [11.0 คะแนน]



จากรูปรังสีแสงที่ 1 จากดวงอาทิตย์ตกกระทบหยดน้ำทรงกลมด้วยมุมตกกระทบ θ และหักเหเข้าไปในหยดน้ำเป็นมุม ϕ และสะท้อนภายในหยดน้ำหลายครั้งก่อนที่จะหักเหออกมาจากหยดน้ำเป็นเส้นรังสีที่ 2 เข้าหาผู้สังเกต

ให้มุมเบี่ยงเบนระหว่างรังสี 1 และรังสี 2 เป็น α และจำนวนครั้งของการสะท้อนของรังสีภายในหยดน้ำคือ N และดัชนีหักเหของหยดน้ำสำหรับเส้นรังสีแสงดังกล่าวเป็น n

ก) จงแสดงว่ามุม α มีความสัมพันธ์กับ ϕ , θ และ N ดังนี้ [0.7 คะแนน]

$$\alpha = 2\pi - (N + 1)(\pi - 2\phi) - 2\theta$$

รังสีจากดวงอาทิตย์เป็นรังสีขนานและตกกระทบหยดน้ำด้วยมุม θ ที่ต่างกันเล็กน้อย $\Delta\theta$ ตามตำแหน่งตกกระทบบนผิวหยดน้ำ ซึ่งจะส่งผลให้มุมหักเหและมุมเบี่ยงเบนแตกต่างจากเดิม $\Delta\phi$ และ $\Delta\alpha$ ตามลำดับ โดยที่ค่าความแตกต่างของมุมเหล่านี้มีค่าน้อยๆ

ข) จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\alpha$ [0.5 คะแนน]

ค) จงหาเงื่อนไขที่ทำให้รังสีเบี่ยงเบน 2 มีความเข้มมากที่สุด แล้วหาค่าของ $\frac{\Delta\phi}{\Delta\theta}$ ภายใต้เงื่อนไขนี้ [1.5 คะแนน]

ง) จงแสดงว่ามุม θ และ ϕ ที่ทำให้เกิดการเบี่ยงเบนด้วยความเข้มสูงสุด เขียนได้ในรูป

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{N+1}{n}\sqrt{\frac{n^2-1}{(N+1)^2-1}}\right), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{(N+1)^2-1}}\right) \quad [1.8 \text{ คะแนน}]$$

จ) จงหาค่ามุมเบี่ยงเบน α เป็นตัวเลขสำหรับการเกิดรุ้งที่มีการสะท้อนภายในหนึ่งครั้ง (รุ้งปฐมภูมิ) สำหรับหยดน้ำที่มีดัชนีหักเห 1.33 [0.5 คะแนน]

ฉ) จงเขียนแผนภาพเส้นทางของแสงของการเกิดรุ้งปฐมภูมิผ่านหยดน้ำโดยแสดงทิศของแสงอาทิตย์ การสะท้อนภายในหยดน้ำ มุมที่รุ้งปรากฏ ตำแหน่งผู้สังเกต และแสดงมุม θ, α [0.8 คะแนน]

ช) จงหาช่วงของค่ามุมเบี่ยงเบน α ที่เป็นไปได้เมื่อมีการสะท้อนภายในหนึ่งครั้ง [1.4 คะแนน]

- ข) จงหาว่าการเกิดรุ้งปฐมภูมินั้นจะทำให้มองเห็นท้องฟ้าภายในวงรุ้งมีความสว่างมากหรือน้อยกว่าท้องฟ้าภายนอกวงรุ้ง [0.8 คะแนน]
- ฅ) จงหาค่ามุมเบี่ยงเบน α เป็นตัวเลขสำหรับการเกิดรุ้งที่มีการสะท้อนภายในสองครั้ง (รุ้งทุติยภูมิ) สำหรับหยดน้ำที่มีดรรชนีหักเห 1.33 [0.5 คะแนน]
- ญ) จงเขียนแผนภาพเส้นทางของแสงของการเกิดรุ้งทุติยภูมิผ่านหยดน้ำโดยแสดงทิศของแสงอาทิตย์ การสะท้อนภายในหยดน้ำ มุมที่รุ้งปรากฏ ตำแหน่งผู้สังเกต และแสดงมุม θ, α [1.3 คะแนน]
- ฎ) จงแสดงว่าจะเกิดแถบมืดที่ความสว่างน้อยกว่าท้องฟ้าทั่วไปเกิดขึ้นระหว่างรุ้งปฐมภูมิและรุ้งทุติยภูมินั้น [1.2 คะแนน]
