



เฉลยข้อที่ 1 ปรากฏการณ์ลอยตัวเหนือก้อนแม่เหล็กของตัวนำยวดยิ่ง (superconductor)

1.1) หาฟลักซ์รวม Φ

ฟลักซ์เนื่องจากก้อนแม่เหล็ก $\pi R^2 B_z$

ฟลักซ์เนื่องจากกระแส LI

ฟลักซ์รวม $\Phi = \pi R^2 B_z + LI$

1.2) จากกฎของฟาราเดย์

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \text{emf} = \text{กระแส} \times \text{ความต้านทาน} = 0$$

ดังนั้น $\Phi = \text{ค่าคงที่}$

ในตอนเริ่มต้นมีฟลักซ์เท่ากับ $B_0 \pi R^2$

ดังนั้น

$$\Phi = \pi R^2 B_z + LI = B_0 \pi R^2$$

$$I = -\frac{1}{L} \pi R^2 \alpha B_0 z$$

เครื่องหมายลบแสดงการต้านการเปลี่ยนฟลักซ์ ขนาดกระแส $= \frac{1}{L} \pi R^2 \alpha B_0 z$

กระแสมีทิศทางขึ้นตามแกน z เมื่อมองจากด้านบนเพื่อให้ฟลักซ์มีขนาดคงที่ (หรือกฎของเลนซ์)

1.3) แรงในแนวดิ่ง

$$\begin{aligned} F_q &= + |2\pi R B_r I| - mg \\ &= mg - \frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 R^4}{L} z \\ &= mg - kz \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } k = \frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 R^4}{L}$$



1.4) จุดสมดุลเกิดขึ้นที่

$$z = z_0 = \frac{mg}{k}$$

$$z_0 = \frac{mgL}{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 R^4}$$

1.5) เมื่อให้ S เป็นระยะจากจุดสมดุล จะได้ว่า

$$z = z_0 + s$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} z = mg - kz$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (z_0 + s) = mg - k(z_0 + s)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} s + ks = 0$$

แสดงว่าจะเกิดการสั่นด้วยความถี่เชิงมุม $\omega = \sqrt{\frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 R^4}{mL}}$ รอบจุด $z = z_0$

โดยมีแอมพลิจูดเท่ากับ z_0

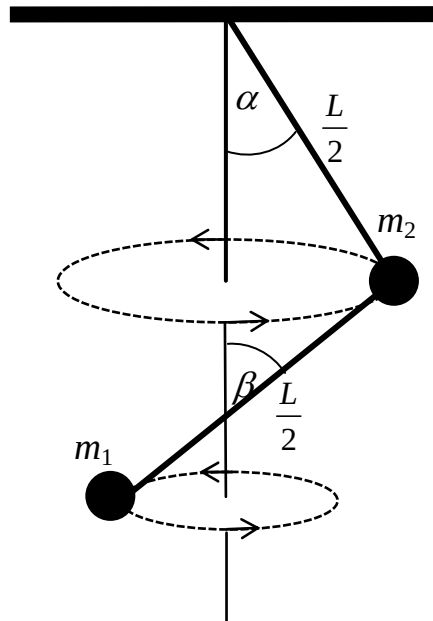
1.6) กระแสมีขนาดโตที่สุดที่ระยะ $z = 2z_0$

$I = \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi R^2 z$ มีค่าสูงสุดเมื่อ z มีค่าสูงสุดนั่นคือ

$$I_{\max} = \frac{m}{\beta \pi R^2 B_0} g = 19.5 \text{ A} \approx 20 \text{ A}$$

เฉลยข้อที่ 2 การหมุนของมวลสองก้อน

ตอนที่ 1 ถ้าก้อนมวล m_2 ผูกอยู่ที่จุดกึ่งกลางพอดี ดังรูป



- 2.1) โดยพิจารณาระบบของมวลทั้งสองที่ผูกติดกันด้วยเส้นเชือกท่อนล่างจะได้

$$x = \frac{L}{2} \sin \alpha - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \sin \beta$$

- 2.2) ที่มวล m_1 แรงคิดแรงแนวตั้ง

$$T_1 \cos \beta = m_1 g$$

$$T_1 = \frac{m_1 g}{\cos \beta}$$

ที่มวล m_2 แรงคิดแรงแนวแกนตั้ง

$$T_2 \cos \alpha = m_2 g + T_1 \cos \beta$$

$$T_2 \cos \alpha = (m_1 + m_2) g$$

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2) g}{\cos \alpha}$$



2.3) เมื่อพิจารณาทั้งระบบ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของแรงสู่ศูนย์กลางจะได้

$$\begin{aligned} T_0 \sin \alpha &= (m_1 + m_2) \omega^2 x \\ (m_1 + m_2) g \tan \alpha &= (m_1 + m_2) \omega^2 x \\ g \tan \alpha &= \omega^2 \frac{L}{2} \sin \alpha - \omega^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \sin \beta \\ \sin \beta &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \left(\sin \alpha - \frac{2g \tan \alpha}{\omega^2 L} \right) \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะมวล m_1 จะได้

$$\begin{aligned} T_1 \sin \beta &= m_1 g \tan \beta = m_1 \omega^2 \frac{L}{2} (\sin \beta - \sin \alpha) \\ \omega^2 &= \frac{2g \tan \beta}{L (\sin \beta - \sin \alpha)} \end{aligned}$$

แทนค่ากลับไปในสมการด้านบน

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sin \beta &= \sin \alpha - \frac{\tan \alpha (\sin \beta - \sin \alpha)}{\tan \beta} \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} &= \sin \alpha \tan \beta - \tan \alpha \sin \beta + \tan \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

หรือจะคิดการหมุนของ m_1 และ m_2 แล้วนำมาแก้สมการก็ได้เช่นกัน

2.4) จาก $\tan \theta \cong \sin \theta \cong \theta$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \beta^2 = \alpha^2$$

$$\beta = \pm \alpha \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}$$



ตอนที่ 2

2.5) ในกรณีนี้ เส้นเชือกทั้งสองส่วนจะมีความตึงเท่ากันจะได้

$$T_0 = T_1.$$

ใช้ผลจาก 2.2)

$$\cos \beta = \frac{m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

2.6) **ตอนนี้จะคำนวณได้ว่า**

$$x = L_2 \sin \alpha - \frac{m_1}{m_1 + m_2} L_1 \sin \beta$$

$$T_0 \sin \alpha = (m_1 + m_2) \omega^2 x$$

$$g \tan \alpha = \omega^2 L_2 \sin \alpha - \omega^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} L_1 \sin \beta$$

$$T_1 \sin \beta = m_1 g \tan \beta = m_1 \omega^2 (L_1 \sin \beta - L_2 \sin \alpha)$$

กำจัดอัตราเร็วเชิงมุมแล้วจะได้

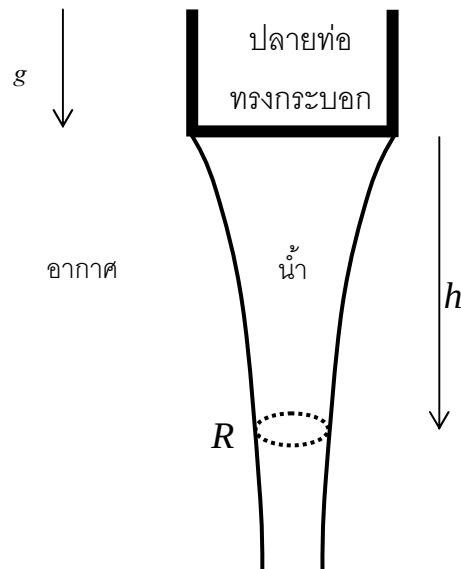
$$L_2 (m_1 + m_2) \sin \alpha \sin \beta - m_1 L_1 \sin^2 \beta = m_1 L_1 \sin \beta \sin \alpha - m_1 L_2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\sin \beta [m_1 (\sin \alpha + \sin \beta)]}{\sin \alpha [m_1 (\sin \alpha + \sin \beta) + m_2 \sin \beta]}$$

โดยที่

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \alpha}$$

เฉลยข้อที่ 3 การไหลของน้ำ



รูปที่ 1 การไหลของน้ำจากปลายท่อทรงกระบอก

- 3.1) จากสมการของแบร์นูลลี เมื่อไม่มีแรงตึงผิว ความดันของน้ำเท่ากับความดันบรรยากาศด้านนอก

v = ความเร็วที่ระยะ h

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P_0 - \rho gh = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0$$

และจากสมการ Continuity Equation

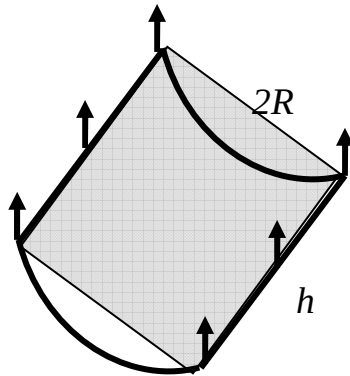
$$\pi R_0^2 v_0 = \pi R^2 v$$

ดังนั้น

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$$

$$R = R_0 \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2} \right)^{-1/4}$$

3.2) พิจารณาทรงกระบอกผ่าซีก รัศมี R สูง h ความดันภายใน P และความดันภายนอก P_0



เมื่อทรงกระบอกอยู่ในสมดุลของแรง (คิดแรงจากพื้นที่หน้าตัดขวาง) ลูกศรแสดงถึงแรงตึงผิวที่ยึดทั้งสองซีกเข้าด้วยกัน

$$P 2Rh = P_0 2Rh + 2\gamma h$$

$$P = P_0 + \frac{\gamma}{R}$$

3.3) เมื่อเปลี่ยนความดันในข้อ ก) เป็นความดันที่รวมแรงตึงผิว จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P_0 + \frac{\gamma}{R} - \rho gh = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0 + \frac{\gamma}{R_0}$$

$$\frac{R_0^4}{R^4} v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R} - 2gh = v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R_0}$$

ซึ่งไม่สามารถจัดรูปเพื่อหา R ได้โดยตรง

$$3.4) \text{ หากใช้การประมาณ } R = R_0 \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2} \right)^{-1/4} + \Delta R = R_1 + \Delta R \text{ โดยที่ } \Delta R \ll R_1$$

จะได้ว่า

$$\frac{R_0^4}{(R_1 + \Delta R)^4} v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho(R_1 + \Delta R)} - 2gh = v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R_0}$$

$$\frac{R_0^4}{R_1^4} v_0^2 \left(1 - \frac{4\Delta R}{R_1} \right) + \frac{2\gamma}{\rho R_1} \left(1 - \frac{\Delta R}{R_1} \right) - 2gh \approx v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R_0}$$



$$-\frac{R_0^4}{R_1^4} v_0^2 \left(\frac{4\Delta R}{R_1} \right) + \frac{2\gamma}{\rho R_1} \left(1 - \frac{\Delta R}{R_1} \right) \approx \frac{2\gamma}{\rho R_0}$$

$$\left(\frac{4R_0^4}{R_1^5} v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R_1^2} \right) \Delta R \approx \frac{2\gamma}{\rho R_1} - \frac{2\gamma}{\rho R_0}$$

$$\Delta R \approx \frac{\left(\frac{2\gamma}{\rho R_1} - \frac{2\gamma}{\rho R_0} \right)}{\left(\frac{4R_0^4}{R_1^5} v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R_1^2} \right)} \approx \frac{2\gamma}{\rho} \frac{\left(1 - \frac{R_1}{R_0} \right)}{\left(\frac{4R_0^4}{R_1^4} v_0^2 + \frac{2\gamma}{\rho R_1} \right)}$$

หรือเมื่อตัดเทอมที่สองในตัวส่วนออก $\Delta R \approx \frac{2\gamma}{\rho} \frac{\left(1 - \frac{R_1}{R_0} \right)}{\left(\frac{4R_0^4}{R_1^4} v_0^2 \right)} \approx \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\left(1 - \frac{R_1}{R_0} \right)}{(v_0^2 + 2gh)}$ (ไม่ให้เกิดค่านอนเพิ่ม)

3.5) ประมาณ $R_1 = 1.33 \text{ mm}$

และ $\Delta R = 1.34 \times 10^{-5} \text{ m}$

3.6) จากข้อ 3.1 น้ำเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง g

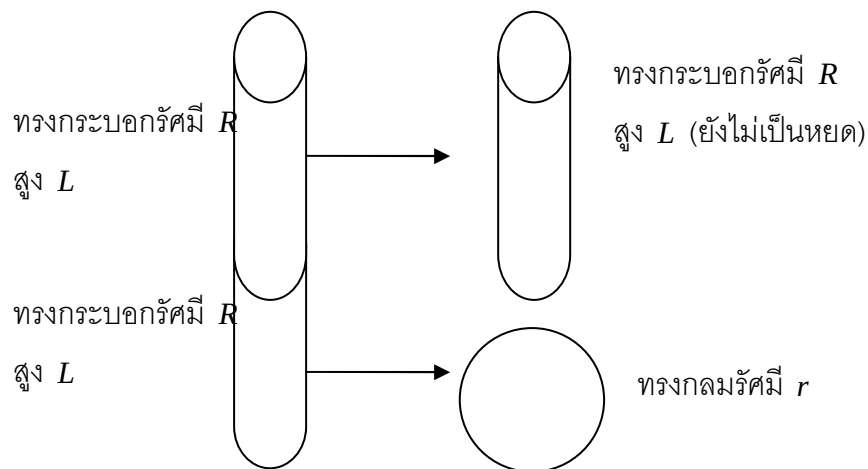
$$h(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \text{ โดยที่ } t = 2.91 \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\gamma}} = 0.12 \text{ s}$$

เมื่อแทนค่าจะได้ $h = 0.84 \text{ m}$

3.7) แยกตัวและหาค่าเป็นทรงกลมที่มีความสูงเดียวกัน $\rightarrow$ พลังงานศักย์โน้มถ่วงคงที่

ความเร็วเท่าเดิม $\rightarrow$ พลังงานจลน์คงที่

ดังนั้นพลังงานของแรงตึงผิวต้องคงที่ด้วย $\rightarrow$ พื้นที่ผิวเท่าเดิม



$$\text{ปริมาตรคงที่ } \pi R^2 L = \frac{4}{3} \pi r^3$$

พื้นที่ผิวคงที่ $2\pi RL = 4\pi r^2$ (ประมาณโดยไม่คิดด้านบนและล่างเนื่องจาก Plateau – Rayleigh ให้

$L \gg R$)

ดังนั้น $L = \frac{9}{2} R$ ประมาณครึ่งหนึ่งของที่คำนวณโดย Plateau และ Rayleigh และ

$$r = \frac{3}{2} R$$