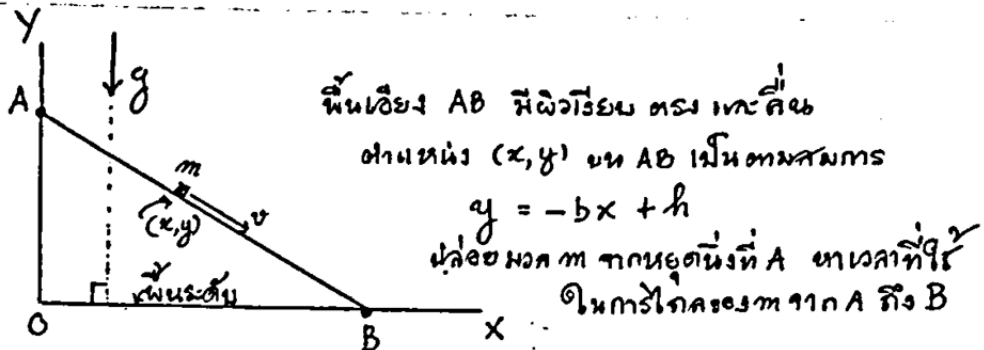


เฉลยข้อสอบปลายค่ายสวชน 1

(กอบวันพุธ 14 ตุลาคม 69)

1/4

Fe 1



วิธีที่ 1 ใช้ความเร็วเฉลี่ย

จุด A อยู่สูงจากพื้นระดับเท่ากับ $y(x=0) = h$

ความเร็วของ m ที่จุด B คือ v_B จากหลักอนุรักษพลังงานกล

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh, \quad \therefore v_B = \sqrt{2gh}$$

ดังนั้นความเร็วเฉลี่ยของ m บนช่วง AB คือ $\bar{v} = \frac{0+v_B}{2} = \left(\frac{gh}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

ระยะทาง $OB = x(y=0) = \frac{h}{b}$

ระยะทาง $AB = \{(OA)^2 + (OB)^2\}^{\frac{1}{2}} = \left\{h^2 + \frac{h^2}{b^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = h \cdot \left\{1 + \frac{1}{b^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้นช่วงเวลาที่ใช้คือ $T = \frac{AB}{\bar{v}} = \left\{\frac{2h}{g}\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

วิธีที่ 2 ใช้วิธีการในแคลคูลัส

ความเร็วของ m ที่ตำแหน่ง (x, y) คือ v ซึ่ง $\frac{1}{2}mv^2 = mg\{h - y(x)\} = mgbx$

$$\therefore v = (2gbx)^{\frac{1}{2}}$$

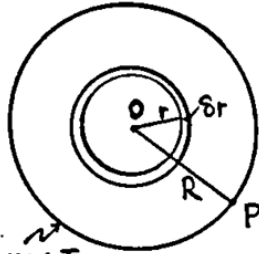
ช่วงระยะทางจาก (x, y) ถึง $(x+\delta x, y+\delta y)$ คือ $\delta s = \{(\delta x)^2 + (\delta y)^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+b^2} \delta x$

เวลาที่ m ใช้เคลื่อนผ่านช่วง δs คือ $\delta t = \frac{\delta s}{v} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{2gb}} x^{-\frac{1}{2}} \delta x$

ดังนั้นเวลาที่ใช้เคลื่อนจาก A ถึง B คือ $T = \left(\frac{1+b^2}{2gb}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{x=0}^{\frac{h}{b}} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$$T = \left(\frac{1+b^2}{2gb}\right)^{\frac{1}{2}} 2 \left(\frac{h}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{2h}{g}\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ข้อ 2



ความหนาแน่น $\rho = A + Br$

การหาค่า I_0

$$\delta I_0 = T 2\pi r \delta r \cdot (A + Br) \cdot r^2$$

$$I_0 = T 2\pi \int_0^R (Ar^3 + Br^4) dr = T\pi R^4 \left(\frac{A}{2} + \frac{2}{5}BR \right)$$

$$\text{ดังนั้น } I_p = T\pi R^4 \left(\frac{3}{2}A + \frac{16}{15}BR \right)$$

ทฤษฎีบทแกนขนานให้ได้ว่า $I_p = I_0 + MR^2$

ซึ่ง M เป็นมวลของแผ่นกลม

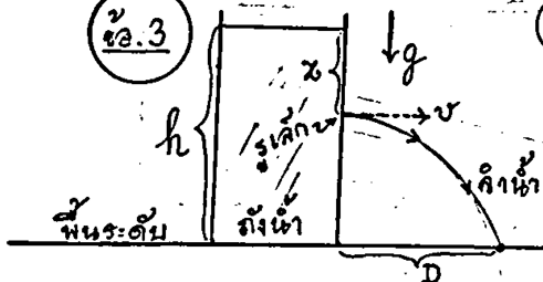
I_0 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากผ่านจุดศูนย์กลางมวล, O.

การหาค่า M $\delta M = T 2\pi r \delta r \cdot \rho$

$$M = T 2\pi \int_0^R r \cdot (A + Br) dr$$

$$= T\pi R^2 \left(A + \frac{2}{3}BR \right)$$

ข้อ 3



1

น้ำพุ่งออกจากกรูต้งฉากผนังด้วยความเร็ว v ซึ่งโดยสมการของ Bernoulli ได้

$$v = (2gx)^{\frac{1}{2}}$$

เวลาที่น้ำใช้เดินทางจากกรูต้งถึงพื้น

$$\text{คือ } t = \left\{ \frac{2(h-x)}{g} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ดังนั้น } D = vt = \{4x(h-x)\}^{\frac{1}{2}}$$

การตอบคำถาม 1

แบบใช้พีชคณิต พิจารณา $x^2 - hx + \frac{D^2}{4} = 0$

$$x \text{ ต้องเป็นจำนวนจริง มั้ว่า } h^2 - D^2 \geq 0$$

$$\text{แสดงว่า } D \text{ โตที่สุดเท่ากับ } h \text{ เมื่อ } x = \frac{h}{2}.$$

แบบใช้แคลคูลัส

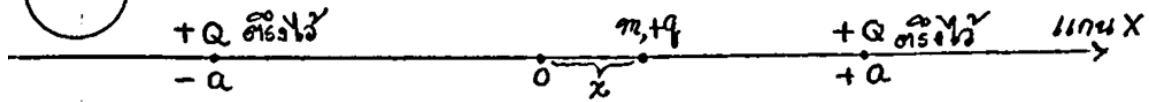
$$\text{พิจารณา } D^2 = 4hx - 4x^2$$

$$\text{ทำ } \frac{d}{dx} D^2 = 4h - 8x, \quad \frac{d^2}{dx^2} D^2 = -8 = \text{ค่าลบ มั้ว่าโตสุด.}$$

$$\text{ถ้า } \frac{d}{dx} D^2 = 0 \text{ ได้ } x = \frac{h}{2} \text{ ทำให้ } D^2 \text{ โตสุด และโตเท่ากับ } h^2$$

$$\text{ดังนั้น } D_{\text{โตสุด}} = h \text{ (เมื่อเราเอ้เล็กที่ } x = \frac{h}{2}).$$

ข้อ 6



- ก. สมการของการเคลื่อนที่ของมวล m ประจุ q คือ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{(a+x)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{(a-x)^2}$$

- ข. ในกรณีที่ $x \ll a$ เราอาจเขียน $(1 \pm \frac{x}{a})^{-2} \approx 1 \mp 2\frac{x}{a}$

$$\text{ดังนั้น } m \frac{d^2 x}{dt^2} \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) - \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \right\}$$

$$\approx -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 a^3} 4x \approx -Kx$$

$$\text{ซึ่ง } K = \frac{Qq}{\pi\epsilon_0 a^3}$$

- ค. สมการ $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{K}{m} x$ บรรยายการเคลื่อนที่แบบ
ที่เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย มันมีรากเป็น

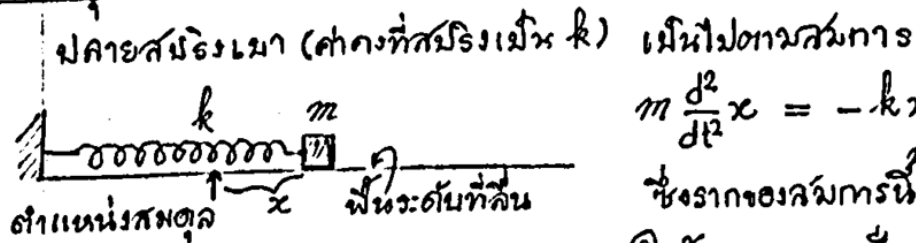
$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

ซึ่ง A & B เป็นค่าคงที่ที่ยังไม่กำหนดค่า

และ $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ เป็นความถี่เชิงมุมของการสั่น

$$\text{ส่วน "ความถี่ } f" \text{ ของการสั่นคือ } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Qq}{\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

หมายเหตุ เพื่อการเปรียบเทียบ ระลึกรู้เรื่องการสั่นของมวล m ที่ยึดติด



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

ซึ่งรากของสมการนี้ (โดยเทคนิค) คือ

ให้ค่าของการสั่นเป็น $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$