เฉลย ปรนัย 10 ข้อ (20 คะแนน)

(สรุปเมื่อ 14.2.69)

(การสอบคัดเข้าค่าย 1 สอวน อาทิตย์ 30.8.'69)

1/4

1

อนุรักษ์โมเมนตัม :- $mv_2 + mv_1 = mu$ ——— (i)

สายย์กำหนด :- $\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}mu^2\right)$ ——— (ii)

$v_1 = u - v_2$,

$$v_2^2 + (u^2 - 2uv_2 + v_2^2) = \frac{3}{4}u^2$$

$$2v_2^2 - 2uv_2 + \frac{1}{4}u^2 = 0$$

$$\left(\frac{v_2}{u}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{u}\right) + \frac{1}{8} = 0$$

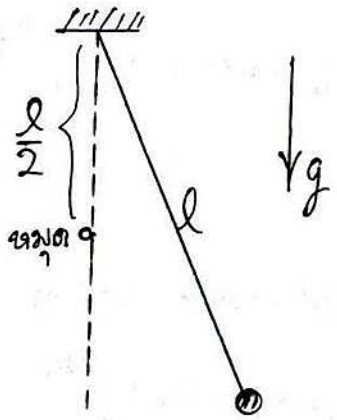
ตอบอันนี้

$$2\left(\frac{v_2}{u}\right) = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{v_2}{u} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \, , \, \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\frac{v_1}{u} = 1 - \frac{v_2}{u} = 1 - \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \, , \, \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}.$$

สังเกตว่า $v_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}u$ ต้องโตกว่า $v_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}u$

2



เวลาสำหรับการแกว่งครึ่งรอบทางขวามือ ของหมุดคือ $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

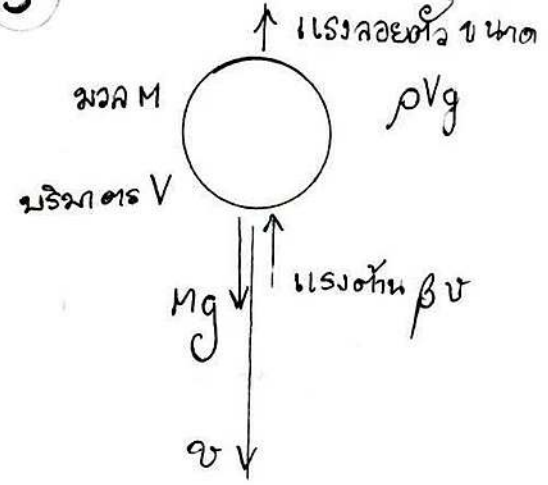
เวลาสำหรับการแกว่งครึ่งรอบทางซ้ายมือ ของหมุดคือ $\pi\sqrt{\frac{l/2}{g}}$

คาบของการแกว่งครบรอบคือ T

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)\left\{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right\}$$

ดังนั้น $\frac{T}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \cdot = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}$

3



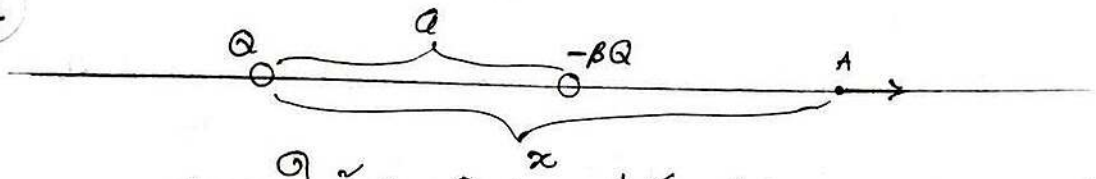
วัตถุถึงความเร็วสุดท้ายเมื่อ

แรงต้าน + แรงลอยตัว = แรงโน้มถ่วง

$$\beta v_{\text{สุดท้าย}} + \rho V g = Mg$$

$$\therefore v_{\text{สุดท้าย}} = (M - \rho V)\frac{g}{\beta}$$

4



กำหนดให้ β เป็นค่าบวกที่น้อยกว่า 1 หาค่าของ x ที่ซึ่งสนามไฟฟ้าเป็นศูนย์

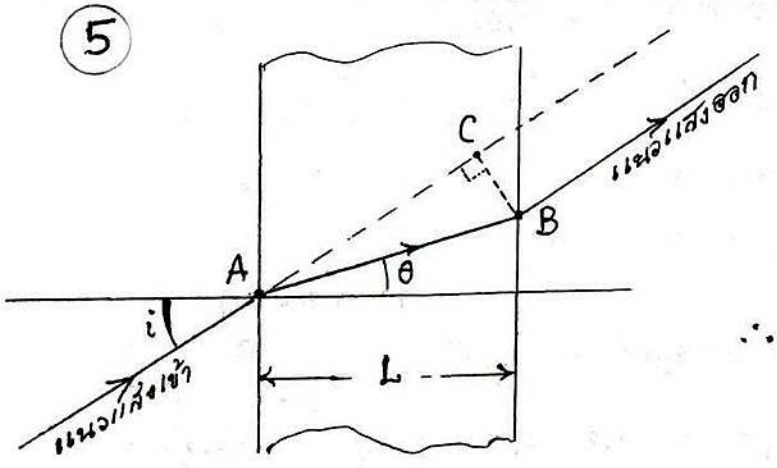
สนามไฟฟ้าที่จุด A คือ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{x^2} - \frac{\beta Q}{(x-a)^2}\right)$

$E = 0$ เมื่อ $\frac{1}{x^2} - \frac{\beta}{(x-a)^2} = 0$,

ได้ $x = \frac{a}{1-\sqrt{\beta}}, \frac{a}{1+\sqrt{\beta}}$

สังเกตว่า ค่า x ต้องโตกว่า a

5

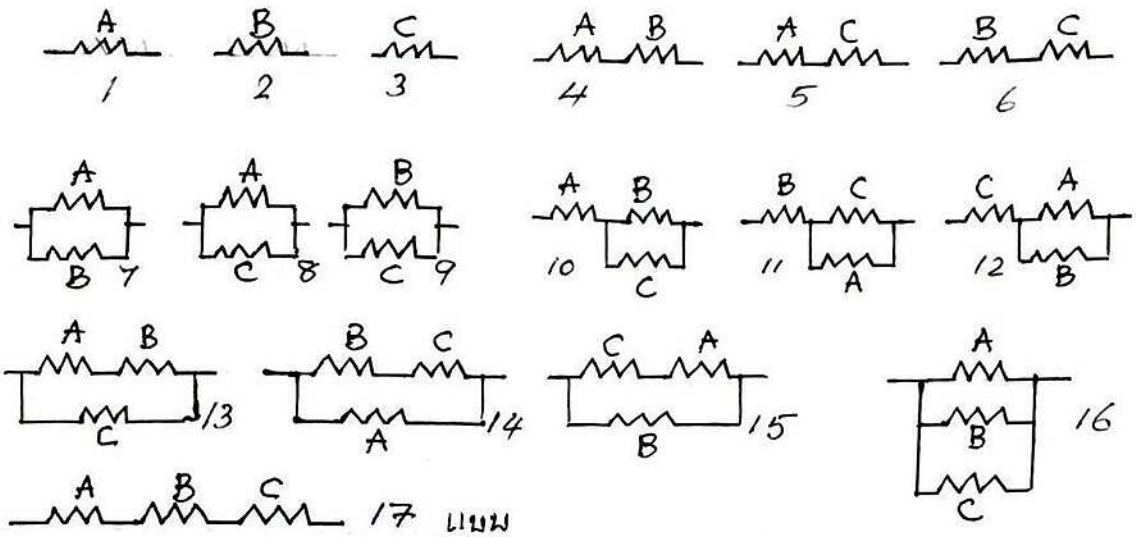


$$BC = (AB)\sin(i-\theta)$$

$$AB = \frac{L}{\cos\theta}$$

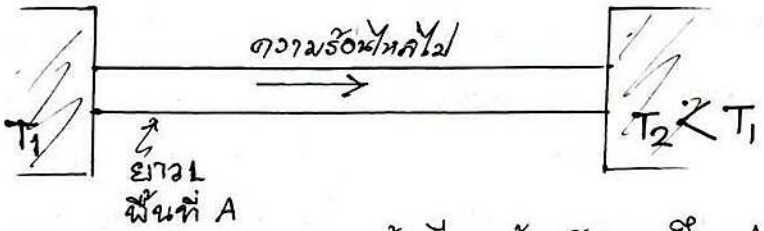
$$\therefore BC = \frac{L\sin(i-\theta)}{\cos\theta}$$

6



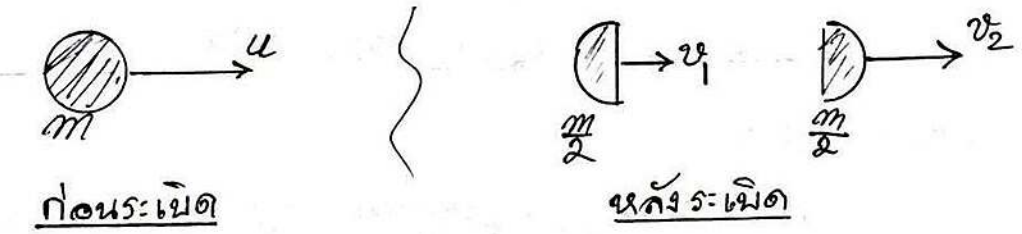
ได้ 17 ค่า

7



ความร้อนไหลด้วยอัตรา $\mathcal{H} = AK\frac{T_1 - T_2}{L}$ จูล/วินาที

8



ก่อนระเบิด หลังระเบิด

โจทย์กำหนดว่า พลังงานจลน์หลังระเบิด = 2 เท่าของค่าก่อนระเบิด

นั่นคือ $\frac{1}{2}\frac{m}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}v_2^2 = 2\left(\frac{1}{2}mu^2\right)$ ——(i)

หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมให้ว่า $\frac{m}{2}v_1 + \frac{m}{2}v_2 = mu$ ——(ii)

จาก (i), ได้ $v_1^2 + v_2^2 = 4u^2$ ——(iii)

จาก (ii), ได้ $v_1 + v_2 = 2u$ ——(iv)

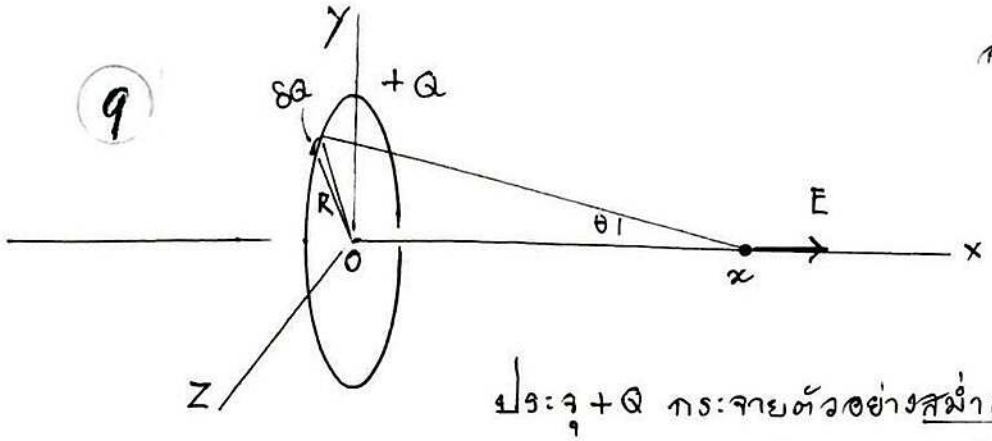
(iv)→ $v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 = 4u^2$ ——(v)

(v)−(iii) ได้ $v_1v_2 = 0$, ซึ่งบ่งว่า v_1 ต้องเป็นศูนย์.

(v_2 เป็นศูนย์ไม่ได้ ระบุกชนอีก, ทั้ง v_1 & v_2 ก็เป็นศูนย์พร้อมกันไม่ได้)

แล้วหา v_2 จาก (iv) ได้ $v_2 = 2u$.

(9)



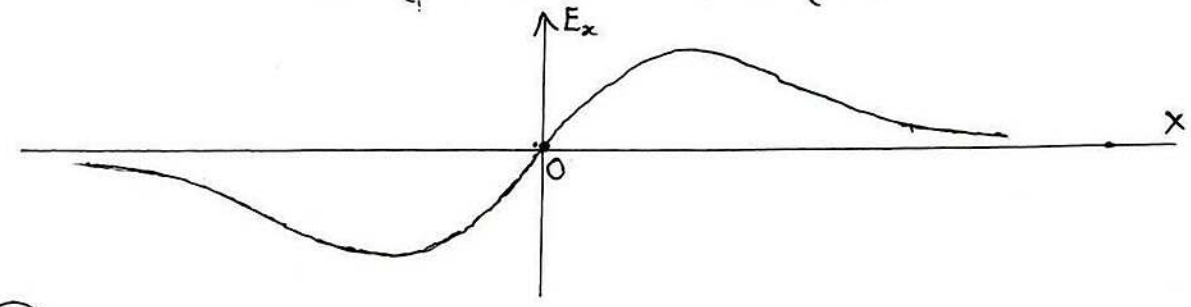
ประจุ +Q กระจายตัวอย่างสม่ำเสมอบนลวดวงกลมรัศมี R

ดังนั้นสนามไฟฟ้าลัพธ์ที่จุด x จึงเป็น E_x ชี้ในแนว $\vec{OX}$

ส่วนสนามในระนาบตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x หักล้างกันหมด

$$\delta E_x = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+R^2}\cos\theta = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int dQ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



(10)

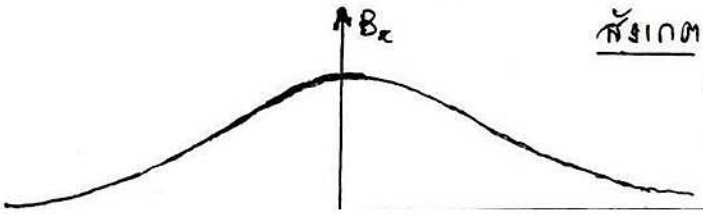
เมื่อหมุนวงลวดในรูปข้างบนรอบแกน OX ในระนาบ YZ ในแนวทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองย้อนทิศ $\vec{OX}$ ด้วยอัตราเร็วเชิงเส้นเท่ากับ v จะได้กระแสไฟฟ้าไหลในทิศทางที่หมุนเป็น $i = Q\frac{v}{2\pi R}$

สนามแม่เหล็กลัพธ์บนแกน X ที่จุด x มีค่าเป็น B_x ชี้ในทิศ $\vec{OX}$

ส่วนองค์ประกอบของสนามในระนาบตั้งฉากกับแกน OX หักล้างกันหมดบนแกน X.

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\cdot(2\pi R)}{x^2+R^2}\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QvR}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 Qv}{4\pi}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{3/2}}$$

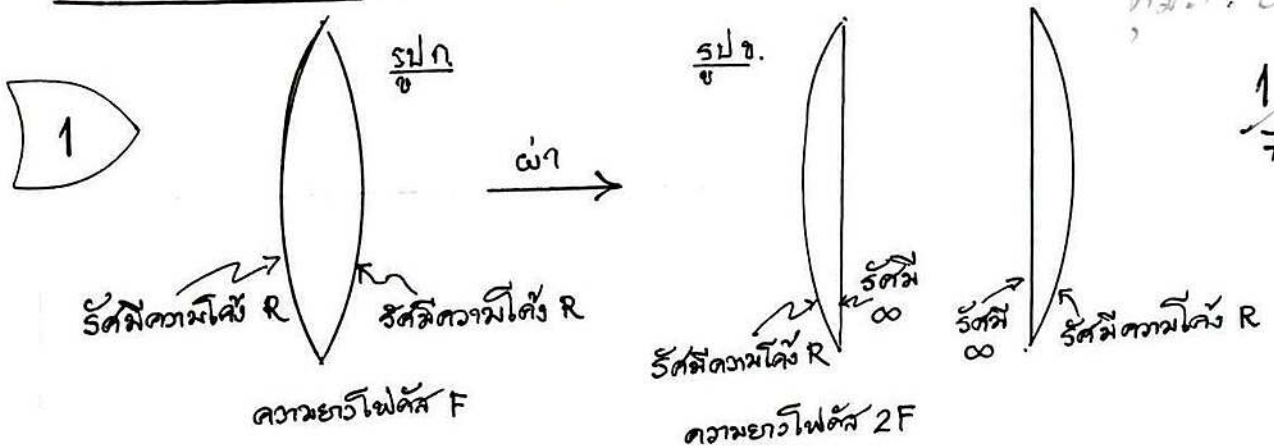


สังเกตว่าสนามมีทิศเดียวกันทั้งซีกซ้ายและขวาของแกน Y

เฉลย เติมคำตอบ 20 ข้อ 80 คะแนน สอบวัน 30.8.'69 (สอบซ่อม กรกฎา.'60)

1/7

1



หมายเหตุ เลนส์รูป ก.

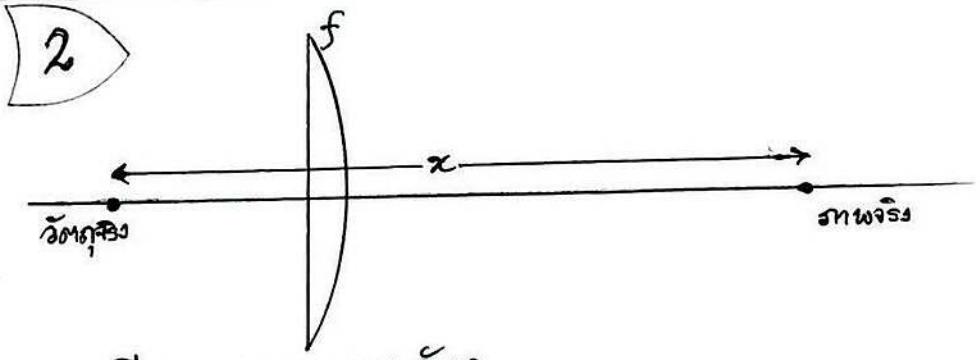
$$\frac{1}{F_n} = (\mu-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)$$

แต่ละเลนส์ รูป ข.

$$\frac{1}{F_v} = (\mu-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2F_n}$$

$$F_v = 2F_n = 2F$$

2

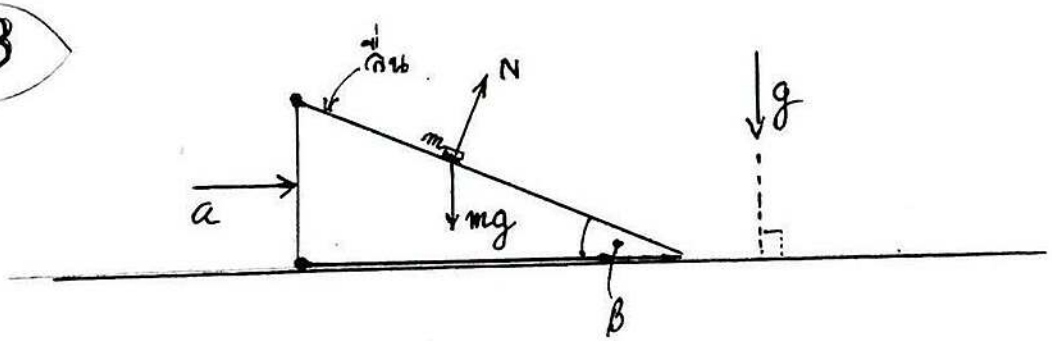


เขียน u แทนระยะวัตถุ

ดังนั้น $\frac{1}{u} + \frac{1}{x-u} = \frac{1}{f}$, $u^2 - xu + xf = 0$,

แก้ได้ $2u = x \pm \sqrt{x^2 - 4xf}$ ซึ่งบ่งว่า $x^2 - 4xf \geq$, $x \geq 4f$.

3

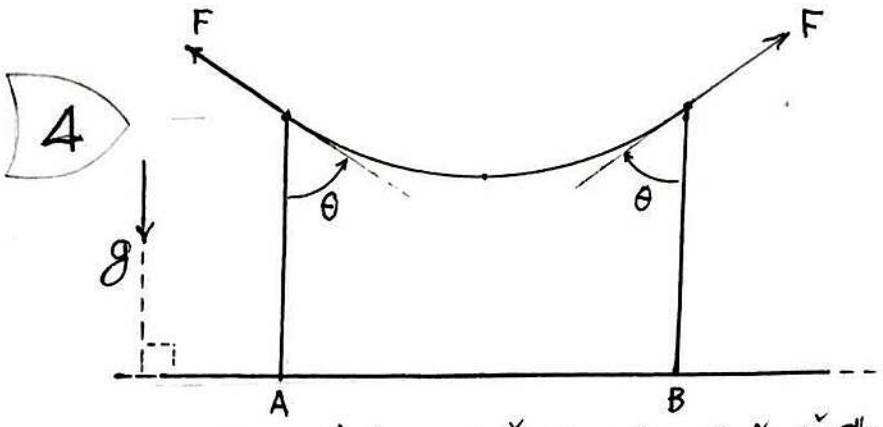


เมื่อ m อยู่นิ่งบนลิ่มซึ่งมีความเร่ง a บ่งว่า:

$ma = N\sin\beta$ และ $mg = N\cos\beta$

ดังนั้น $a = g\tan\beta$

4



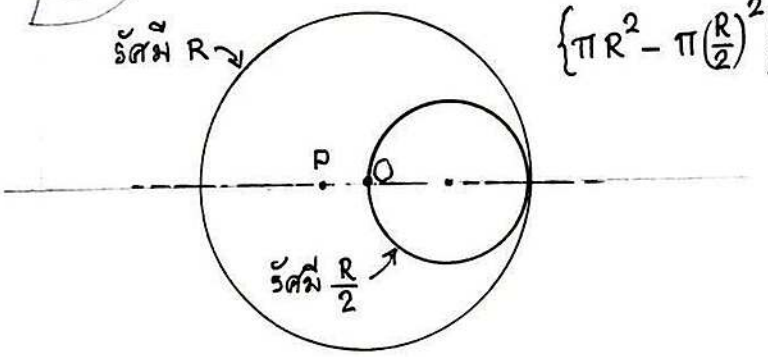
F เป็นแรงที่ปลายเสาทั้งสองแต่ละเสาต้องรั้งเชือกไว้

$F\cos\theta = \frac{1}{2}Mg$

แรงความตึง (T) ที่จุดกึ่งกลางเชือกอยู่ในแนวระดับ

ดังนั้น $T = F\sin\theta = \frac{1}{2}Mg\tan\theta$

5



ให้ P เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล

$\left\{\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}(OP) = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{R}{2}$

$OP = \frac{1}{6}R$

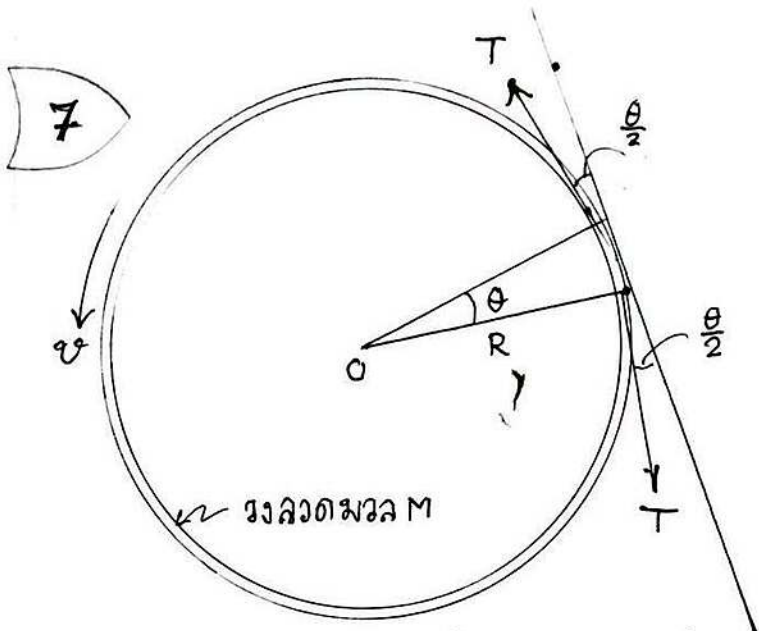
6

ในช่วงเวลา δt สั้น น้ำพุ่งออกไปเป็นมวล $\delta m = \rho A v \delta t$

เป็นโมเมนตัม $v\delta m = \rho A v^2 \delta t$

แรงปฏิกิริยาเท่ากับ $\frac{v\delta m}{\delta t} = \rho A v^2$

7

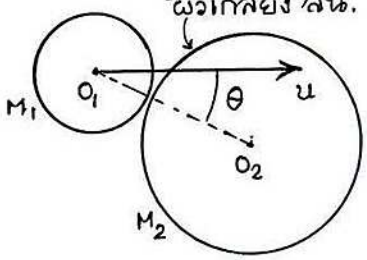


ลวดในช่วง θ เล็กๆ มี
มวล $\frac{\theta}{2\pi}M$
แรงที่รั้งมวลนี้เข้าสู่ศูนย์กลาง
คือ $2T\sin(\frac{\theta}{2})$ ซึ่งต้อง
เท่ากันกับ $\frac{\theta}{2\pi}M\frac{v^2}{R}$

$2T\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2\pi}M\frac{v^2}{R}$ โดยเฉพาะเมื่อ limit $\theta \to 0$

ดังนั้น $T = \frac{Mv^2}{2\pi R}$

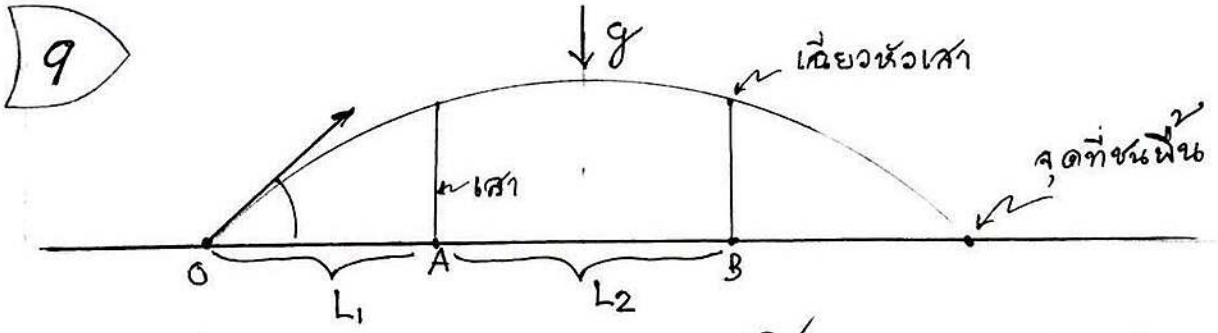
8



ในการชนกัน องค์ประกอบ $u\sin\theta$ ของ M_1
ไม่เปลี่ยนแปลง
องค์ประกอบ $u\cos\theta$ ของ M_1 หลังการ
ชนอย่างยืดหยุ่นจะกลายไปเป็นศูนย์
ถ้า $M_1 = M_2$ ส่วน M_2 จะมีความ
เร็วในทิศ $\overrightarrow{O_1O_2}$ เป็น $u\cos\theta$

$$\frac{\text{อัตราเร็วหลังชนของ } M_1}{\text{อัตราเร็วหลังชนของ } M_2} = \frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} = \tan\theta.$$

9



เนื่องจากเสาสูงเท่ากัน เส้นทางของโพรเจคไทล์จะต้องสมมาตร
เทียบกับจุดกึ่งกลางระหว่างเสา A กับเสา B ดังนั้นจุดที่ชนพื้น
อยู่ห่างจากจุดโคนเสา A เท่ากับ $(L_1 + L_2)$

10 อัตราเร็วของคลื่นเสียงในอากาศคือ $v = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$

$PV = nRT = \frac{m}{M}R(273.15 + t°C)$, $\rho = \frac{m}{V}$

ดังนั้น $v = \left\{\frac{\gamma R}{M}.(273.15 + t°C)\right\}^{\frac{1}{2}}$

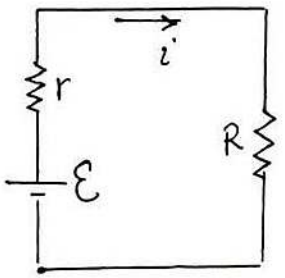
หรือ $v = \left\{\frac{\gamma R}{M}(273 + t°C)\right\}^{\frac{1}{2}}$ ก็ได้.

หมายเหตุ สำหรับอากาศ $\gamma \approx 1.40$, $M \approx (0.78)(28)(\times 10^{-3}) + (0.21)(32)(\times 10^{-3}) \approx 29 \times 10^{-3}$ kg.

ค่าคงที่ $R = 8.314$ J.mol^{-1}K^{-1}, ดังนั้น $v \approx \left(\frac{273\gamma R}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{t°C}{2\times 273}\right)$

$v \approx (331\ m s^{-1})\left\{1 + \frac{t°C}{2\times 273}\right\} \approx (331 + 0.6t°C)\ m s^{-1}$.

11



$i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$

$P = i^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$

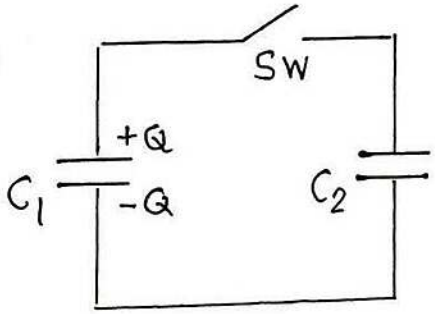
$R^2 - \left(\frac{\mathcal{E}^2}{P} - 2r\right)R + r^2 = 0$

ค่าของ R เป็นจำนวนจริงถ้า

$\left(\frac{\mathcal{E}^2}{P} - 2r\right)^2 - 4r^2 \geq 0$, $\frac{\mathcal{E}^4}{P^2} - 4\frac{\mathcal{E}^2 r}{P} \geq 0$, $\frac{\mathcal{E}^2}{P} \geq 4r$

ดังนั้น P มีค่าโตสุดเท่ากับ $\frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.

12

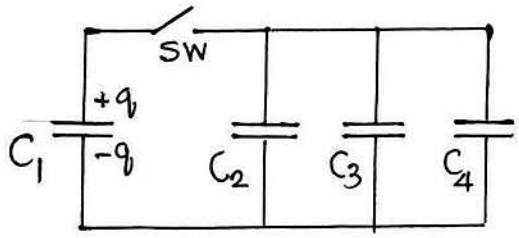


หลังจากสับสวิทช์ลง ประจุ+Q กระจายอยู่ทางด้านบนของของตัวเก็บประจุรวม ซึ่งมีความจุรวมเป็น $(C_1 + C_2)$ ประจุ -Q อยู่ด้านล่างของตัวเก็บประจุรวม พลังงานไฟฟ้ารวมหลังสับคือ $\frac{1}{2}Q\frac{Q}{C_1+C_2}$

พลังงานไฟฟ้าก่อนสับคือ $\frac{1}{2}Q\frac{Q}{C_1}$

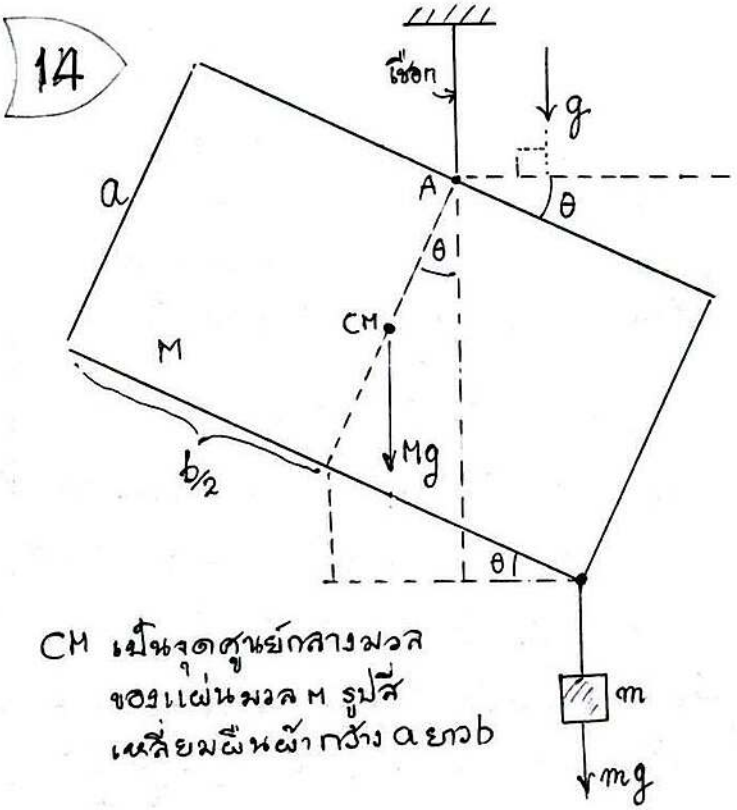
ดังนั้น $\frac{\text{พลังงานไฟฟ้าหลังสับ}}{\text{พลังงานไฟฟ้าก่อนสับ}} = \frac{C_1}{C_1+C_2} \times 100\ \%$

13



หลังสับสวิทช์ SW ลง ความจุรวมของระบบคือ $C = C_1+C_2+C_3+C_4$
ประจุไฟฟ้ายังเท่าเดิม ดังนั้นความต่างศักย์คร่อม C_1 จึงเป็น $\frac{q}{C}$
ประจุ q_1 ใน C_1 ต้องให้ค่า $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q}{C}$, ได้ $q_1 = \frac{C_1}{C_1+C_2+C_3+C_4}q$

14



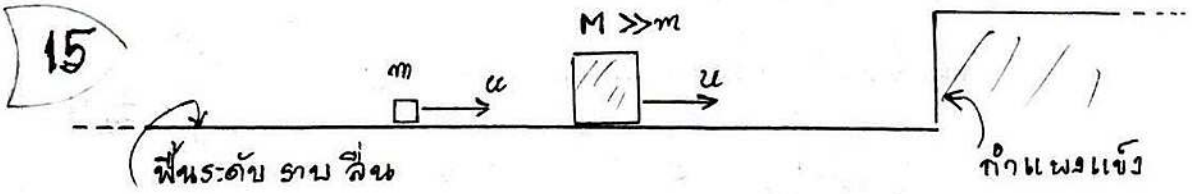
ที่สภาวะสมดุลเชิงกลเราได้
โมเมนต์รอบจุดหมุน A :

$$Mg\frac{a}{2}\sin\theta = mg\left(\frac{b}{2}\cos\theta - a\sin\theta\right)$$

ได้ $\tan\theta = \left(\frac{m}{M+2m}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$

CM เป็นจุดศูนย์กลางมวล
ของแผ่นมวล M รูปสี่
เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง a ยาว b

15



หลังชนกับกำแพงอย่างยืดหยุ่นแล้ว M ก็สะท้อนกลับด้วยความเร็ว u ไปทางซ้ายเทียบกับกำแพง และในมุมมองของผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับ M จะพบ m เคลื่อนที่เข้าหา M ด้วยความเร็ว 2u ดังนั้นหลังจาก m ชนกับ M อย่างยืดหยุ่นแล้ว m จะสะท้อนจาก M ด้วยความเร็ว 2u ไปทางซ้าย ถ้าหากว่า $m \ll M$. นั่นบ่งว่าความเร็วสุดท้ายของ m เทียบกับกำแพงมีขนาดเป็น $u+2u = 3u$

16 โจทย์ให้ถือว่าไอน้ำเป็นตัวแก๊สอุดมคติ ประพฤติตัวตามสมการ

$PV = nRT$

ซึ่ง $P \approx 1.0\times10^5\ N m^{-2}$

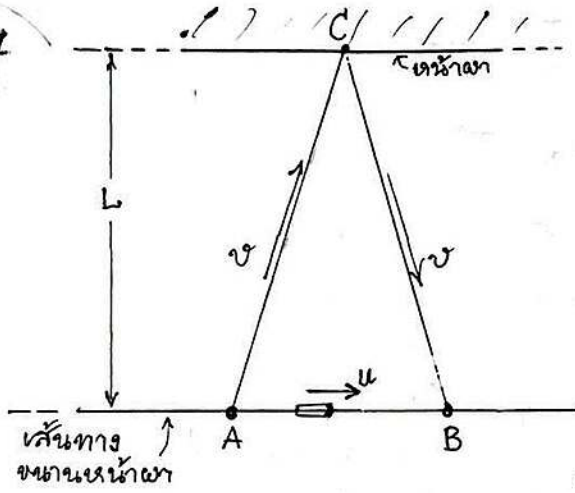
$T \approx 273+127 \approx 400$

$R \approx 8.3\ J K^{-1} mol^{-1}$

$n = \frac{1.8\,g}{18\,g} = 0.1\ mol.$

$\therefore V = \frac{0.1\times8.3\times400}{\quad} m^3 = \frac{0.1\times8.3\times400}{10^5}\times10^6\ cm^3 = 3320\ cm^3.$

17



เรือเปิดหวูดสั้น ๆ ที่จุด A และได้ยินเสียงสะท้อนกลับที่จุด B เมื่อเวลาผ่านไปแล้วเท่ากับ T

ดังนั้น $AC = CB = v\frac{T}{2}$

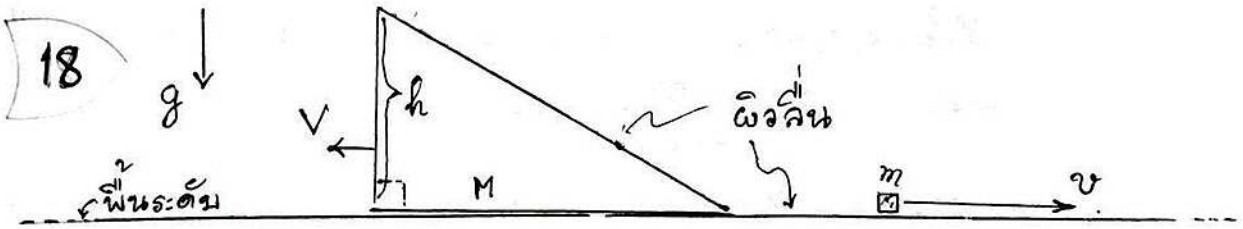
$AB = uT$

และ $L^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (AC)^2$

ได้ $L = \frac{T}{2}(v^2 - u^2)^{1/2}$

แก้ไขแล้ว 31.8.69

18

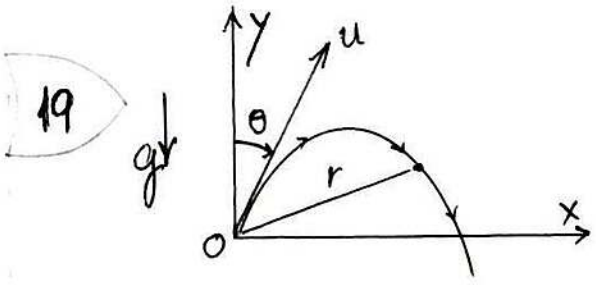


หลักอนุรักษ์พลังงานบ่งว่า $\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$ ——— (i)

หลักอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นให้ผลว่า $MV = mv$ ——— (ii)

แก้สมการได้ $V = \left(\frac{m/M}{\sqrt{1+(m/M)}}\right)\sqrt{2gh}$

19



การหาค่าของมุมยิง θ ที่จะทำให้ r มีแต่เพิ่มขึ้นๆ

โจทย์กำหนดว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ r^2 กับเวลา t คือ

$$(g^2 t)\left\{\left(t - \frac{3}{2}\frac{u\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{2u^2}{g^2}\left(1 - \frac{9}{8}\cos^2\theta\right)\right\}$$

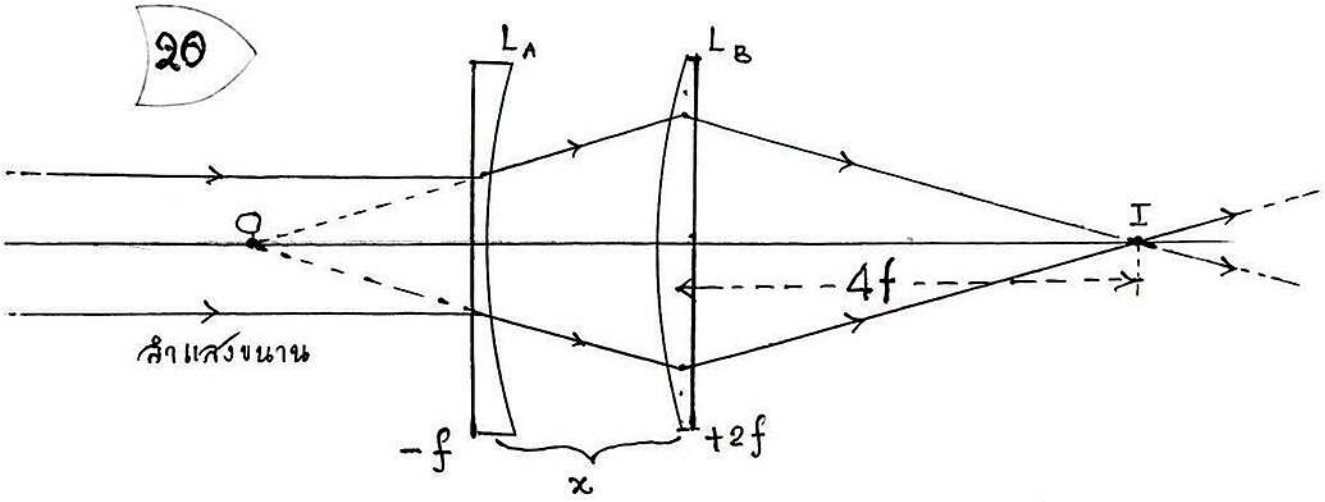
อัตรานี้จะต้องเป็นบวกทุกค่าของ $t \geq 0$ ถ้าหากต้องการให้ r มีแต่เพิ่มขึ้นๆ

การที่จะเป็นเช่นนั้นได้ต้องบังคับให้พจน์ $\frac{2u^2}{g^2}\left(1 - \frac{9}{8}\cos^2\theta\right) \geq 0$,

นั่นคือ $\cos^2\theta \leq \frac{8}{9}$, $1 - \sin^2\theta \leq \frac{8}{9}$, $\sin\theta \geq \frac{1}{3}$, $\theta \geq (\arcsin\frac{1}{3} = 19.47^\circ)$

$\longrightarrow \theta \geq (\arccos\sqrt{\frac{8}{9}} = 19.47^\circ)$

20

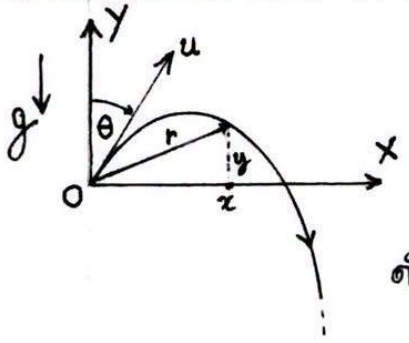


ตามสูตรของการเกิดภาพโดยเลนส์บางๆ เมื่อระยะวัตถุเสมือน O หาก

$\frac{1}{u} + \frac{1}{4f} = \frac{1}{2f}$ ได้ $u = 4f$ ทางซ้ายมือของเลนส์บน

ดังนั้น $x = 4f - f = 3f$.

ขยายความข้อ 19 (ที่เป็นข้อสอบเข้าค่าย 1 สอวน เมื่อวันอาทิตย์ที่ 30.8.'69)



โพรเจคไทล์ออกจากจุด O ด้วยความเร็วต้น u
ทำมุมกับแนวดิ่งเป็นมุม θ
r เป็นระยะห่างของโพรเจคไทล์จากจุด O ที่เวลา t
หลังจากเมื่อเริ่มออกจาก O

ดังนั้น $r^2 = x^2 + y^2 = (u\sin\theta)^2 t^2 + \{(u\cos\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\}^2$

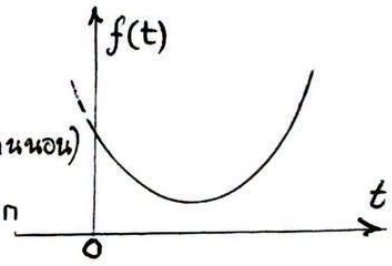
$= \frac{1}{4}g^2t^4 - (ug\cos\theta)t^3 + u^2t^2$ ——— (1)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ r คือ $\frac{d}{dt}r$ แต่เราจะพิจารณาอัตราการเปลี่ยนของ r^2

$\frac{d}{dt}r^2 = g^2t^3 - (3ug\cos\theta)t^2 + 2u^2t = (g^2t)\left\{t^2 - \frac{3u\cos\theta}{g}t + 2\frac{u^2}{g^2}\right\}$ —(2)

เราต้องการหาเงื่อนไขที่ทำให้ r (ดังนั้น r^2 ด้วย) มีแต่เพิ่มขึ้นเมื่อ t ผ่านไปๆ
เงื่อนไขนั้น (เกี่ยวกับมุม θ ตั้งต้น) มาจากการบังคับให้ $\frac{d}{dt}r^2$ ต้องเป็นบวก
ทุกขณะเวลา หรือต่ำสุดคือเป็นศูนย์ นั่นคือ $t^2 - \frac{3u\cos\theta}{g}t + 2\frac{u^2}{g^2} \geq 0$ —(3)

<u>วิธีที่ 1</u> เขียน $f(t) \equiv t^2 - \frac{3u\cos\theta}{g}t + 2\frac{u^2}{g^2}$



กราฟของ f(t) เป็นรูปพาราโบลาหงายดังรูปขวามือ ซึ่ง
เราจงใจเขียนให้ f(t) เป็นบวกทุกค่า t (ต่ำสุดคือแตะแกนนอน)
รูปแบบนี้บ่งว่ารากของสมการ $f(t) = 0$ ต้องมีราก
เป็น <u>เลขโชงชั้น</u> , เช่นนั้นเราต้องจัดให้

$\left(-\frac{3u\cos\theta}{g}\right)^2 - 8\frac{u^2}{g^2} \leq 0$ นั่นคือ $\cos^2\theta \leq \frac{8}{9}$, $1 - \cos^2\theta \geq 1 - \frac{8}{9}$,

ได้ $\sin\theta \geq \frac{1}{3}$. <u>ตอบ</u>

<u>วิธีที่ 2</u> พิจารณา $f(t) = t^2 - 2\left\{\frac{3u\cos\theta}{2g}\right\}t + \left\{\frac{3u\cos\theta}{2g}\right\}^2 - \left\{\frac{3u\cos\theta}{2g}\right\}^2 + 2\frac{u^2}{g^2}$

$= \left[t - \frac{3u\cos\theta}{2g}\right]^2 - 2\frac{u^2}{g^2}\left\{\frac{9}{8}\cos^2\theta - 1\right\}$

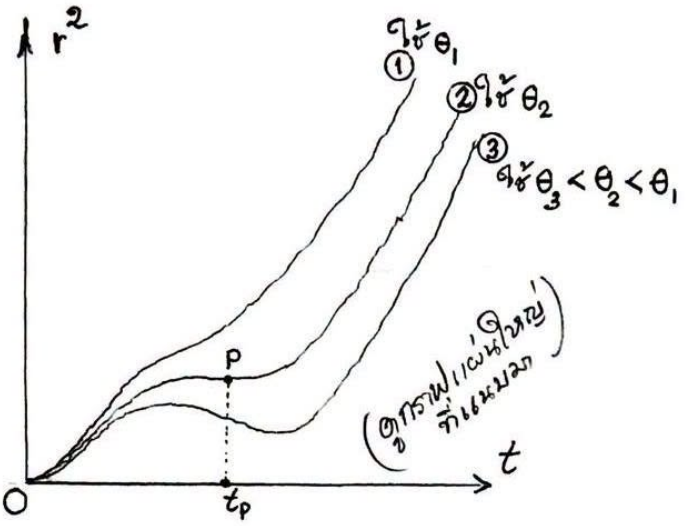
ซึ่งพจน์แรกเป็นบวกเสมอ พจน์หลังเป็นบวกก็ได้เป็นลบก็ได้ ดังนั้นถ้า
ต้องการให้ f(t) เป็นบวกอย่างเดียวละก็ต้องจัดให้ $\frac{9}{8}\cos^2\theta - 1 \leq 0$

ให้ผลว่า $\sin\theta \geq \frac{1}{3}$. <u>ตอบ</u>

<u>หมายเหตุ</u> นักเรียนในระดับชั้นนี้เรียนพีชคณิตเลิศและรู้จักสมการ quadratic equations
$ax^2 + bx + c = 0$ และรู้ว่ารากของมันเป็น $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
ฟังก์ชัน $y(x) = ax^2 + bx + c$ บรรยายรูปพาราโบลาหงายถ้า a เป็นค่าบวก
พาราโบลาตัดแกน X ถ้ารากเป็นจำนวนจริง แต่ไม่ตัดถ้ารากเป็นเลขโชงชั้นซึ่งต้อง
เป็น COMPLEX CONJUGATES ของกันและกันด้วย

ขยายความข้อ 19 (ต่ออีก)

วิธีที่ 3 พิจารณาเส้นกราฟของ $r^2 = \frac{1}{4}g^2t^4 - ug\cos\theta\, t^3 + u^2t^2$ ——— (i)



สำหรับมุม θ ต่างๆ กัน ซึ่งสำหรับ θ_1 นั้น r^2 มีแต่เพิ่มเสมอ t เพิ่ม สำหรับ θ_3 นั้น r^2 เพิ่มถึงจุดหนึ่งแล้วลดช่วงระยะหนึ่ง แล้วก็เพิ่มใหม่ เพิ่มไปตลอด แต่สำหรับ θ_2 ค่าเหมาะๆ r^2 ตั้งท่าจะลดเมื่อเข้าหาจุด P จากซ้าย แล้วกลับเพิ่มใหม่ไปตลอด

จุด P เป็นจุดที่ $\frac{d}{dt}r^2 = 0$, และความที่มันเปลี่ยน (หมายถึงเส้นกราฟ) จากโค้งลงไปเป็นโค้งขึ้น บ่งว่า $\frac{d^2}{dt^2}r^2 = 0$ ด้วยที่จุด $t = t_p$ นี้

ดังนั้นจาก (i) เราได้:

$$\left(\frac{d}{dt}r^2\right)_{\text{ที่ } t_p} = g^2t_p^3 - 3ug\cos\theta_2\, t_p^2 + 2u^2t_p = 0\,,$$

$$g^2t_p^2 - 3ug\cos\theta_2\, t_p + 2u^2 = 0 \quad \text{——— (ii)}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}r^2\right)_{\text{ที่ } t_p} = 3g^2t_p^2 - 6ug\cos\theta_2\, t_p + 2u^2 = 0\,,$$

$$3g^2t_p^2 - 6ug\cos\theta_2\, t_p + 2u^2 = 0 \quad \text{——— (iii)}$$

แล้วแก้ (iii) กับ (ii) หาค่าของ t_p ได้ $t_p = \frac{3u\cos\theta_2}{2g}$

แล้วเอาค่า t_p นี้แทนใน (ii) จะได้ $-\cos^2\theta_2 = -\frac{8}{9}$

$$\sin^2\theta_2 = \frac{1}{9}\,, \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{3}\,.$$

เราสรุปได้ว่าค่า r เอาแต่โตขึ้นๆ เมื่อเวลาผ่านไปๆ ถ้ามุมตั้งต้น θ หากับแนวดิ่งนั้นเป็น $\theta \geq \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 19^\circ.47$

หมายเหตุ การที่เราเขียนวิทยุเพื่อให้ตอบตามวิธีที่ 2 ก็เพราะเพื่อหลีกเลี่ยงการใช้แคลคูลัสตรงๆ สำหรับการคัดเลือกเข้าค่าย 1 สอวน ข้อสอบคัดเข้าค่าย 1 นี้ของศูนย์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาเป็นข้อสอบเติมรูปแบบต้นฉบับ

~ การรู้แคลคูลัสจะช่วยให้คิดเร็วขึ้น ~