กระดาษคำตอบ (1/4)

25 ส.ค. '67

ชื่อ-สกุล ..... เลขประจำตัวสอบ .....

สถานที่สอบ ..... ห้องสอบ .....

ตอนที่ 1

ข้อ 1 ใช้เวลาเป็น $\sqrt{2}$ เท่า

ข้อ 2 ก. OP = $(2u^2)/g$

ข. ϕ = 30 องศา

ข้อ 3 ความเร็วหลังชนของ A คือ $+u/2$

ความเร็วหลังชนของ B คือ $+u/2$

ข้อ 4 ขนาดของแรงเสียดทาน = $(Mg\sin\theta)/\left(1+\frac{MR^2}{I}\right)$

ข้อ 5 ก. (ตอบผลักหรือดูด) ดูด

ข. มีขนาด = $\frac{\mu_0 I^2 R}{d}$

ข้อ 6 ก. สนามไฟฟ้า E ที่จุด $(0,0)$ มีค่า = ศูนย์

ข. E โตสุด = $\frac{q}{3\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0 a^2}$

ข้อ 7 ก. ความจุลัพธ์ = $(2\varepsilon_0 A)/d$

ข. ขนาดของประจุลัพธ์ = $\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\right)V$

ข้อ 8 อัตราส่วนของประจุ (ใน C_1/ใน C_2) = 1

25 ส.ค. '67

กระดาษคำตอบ (2/4)

ชื่อ-สกุล ..... เลขประจำตัวสอบ .....

สถานที่สอบ ..... ห้องสอบ .....

ตอนที่ 1 (ต่อ)

ข้อ 9 ก. ขนาดของสนามที่จุด O คือ $B =$ $\left(\frac{\mu_0 I}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

ข. ทิศทาง (ชี้เข้าหรือชี้ออกจากหน้ากระดาษ) ชี้ออก

ข้อ 10 เรือชนหน้าผาที่เวลา = $\left(\frac{c+v}{2v}\right)t$

ข้อ 11 ค่าความต้านทานลัพธ์ = 193 โอห์ม (ตอบเลขนัยสำคัญสามตัว)

ข้อ 12 $\phi =$ $4\theta - 2i$

ข้อ 13 ก. P_i สูงกว่า P_o

ข. สูงกว่า = $4\gamma/R$

ข้อ 14 $\frac{\delta f}{f} =$ $\mp \frac{\delta\mu}{\mu-1}$ เครื่องหมายลบ

ข้อ 15 $T_2 =$ 478 เคลวิน

กระดาษคำตอบ (3/4)

25 ส.ค. '67

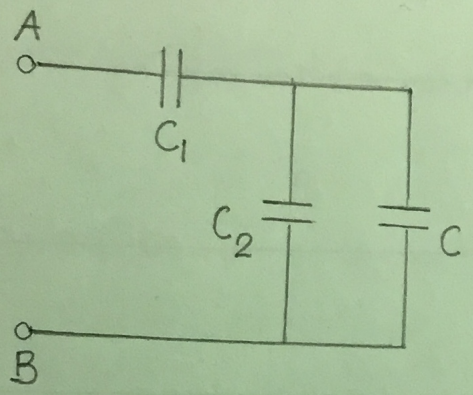
ชื่อ-สกุล .....

สถานที่สอบ ..... เลขประจำตัวสอบ .....

..... ห้องสอบ .....

ตอนที่ 2

ข้อ 16 ก.



$$C_{AB} = \frac{C_1(C_2+C)}{C_1+C_2+C} \equiv C$$

$$C^2 + C_2C - C_1C_2 = 0$$

$$C = +\sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 + C_1C_2} - \frac{C_2}{2}$$

สังเกตว่า ถ้า $C_1 = 4\,\mu F$ และ $C_2 = 2\,\mu F$

จะได้ $C = 2\,\mu F$

และ $C_{AB} = C = 2\,\mu F$

ผลนี้จะใช้ใน ข้อ ข.

กระดาษคำตอบ (4/4)

25 ส.ค. '67

ชื่อ-สกุล .....

สถานที่สอบ ..... เลขประจำตัวสอบ .....

ห้องสอบ .....

ข้อ 16 ข. (ใช้ผลจาก ก. ช่วย)

สังเกตว่าจุด ⑤ มีศักย์ไฟฟ้าเป็นครึ่งหนึ่งของที่จุด ④

เขียน $V_5 = \frac{1}{2} V_4$

ในทำนองเดียวกัน $V_4 = \frac{1}{2} V_3$

$V_3 = \frac{1}{2} V_2$

$V_2 = \frac{1}{2} V_1$

$V_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}$

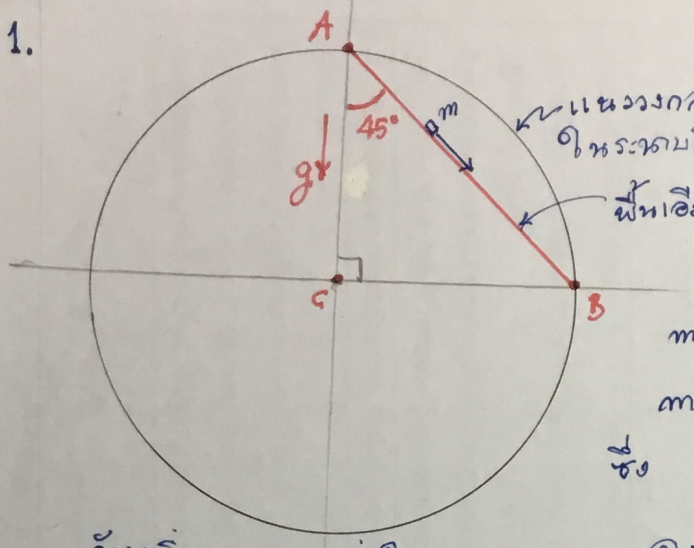
$\therefore V_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \mathcal{E}$

$= \frac{\mathcal{E}}{32}$

เฉลยละเอียด

F. 19.7.67

1.



m อยู่ภายใต้ความเร่ง $g\cos 45^\circ = \frac{g}{\sqrt{2}}$

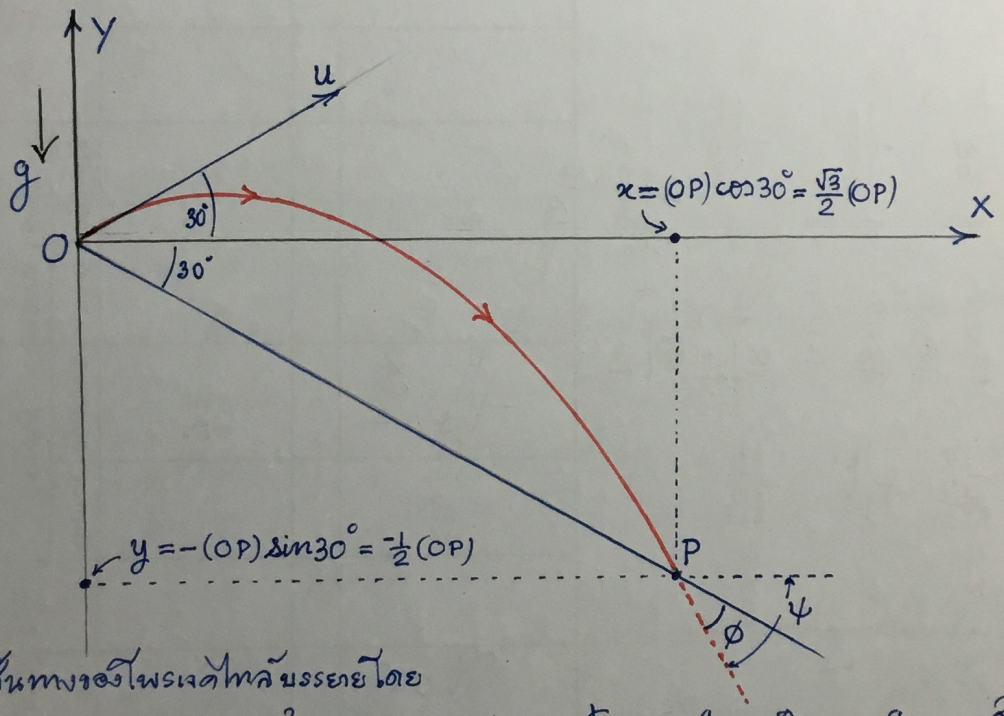
m ใช้เวลาจากหยุดนิ่งที่ A ถึง B เป็น t_{AB}

ซึ่ง $AB = \frac{1}{2}(g\cos 45^\circ)\, t_{AB}^2$

วัตถุที่ตกจากหยุดนิ่งในแนวจาก A ถึง C ใช้เวลา t ซึ่ง $AC = \frac{1}{2} g t^2$

ดังนั้น $\left(\frac{t_{AB}}{t}\right)^2 = \frac{AB}{AC}\frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{(\cos 45^\circ)^2}$, $\frac{t_{AB}}{t} = \sqrt{2}$ เท่า ตอบ

2.



เส้นทางของโพรเจกไทล์บรรยายโดย

$y = (u\sin 30^\circ)t - \frac{1}{2}gt^2$, $x = (u\cos 30^\circ)t$, เป็น $y = (\tan 30^\circ)x - \frac{g}{2u^2\cos^2 30^\circ}x^2$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3}\frac{g}{u^2}x^2$

ที่จุด P ได้ $-\frac{1}{2}(OP) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(OP) - \frac{2}{3}\frac{g}{u^2}\frac{3}{4}(OP)^2$, $OP = \frac{2u^2}{g}$. ตอบ

การหามุม ϕ ก่อนอื่นต้องหาความเร็วในแนวดิ่ง v_{yP} ที่จุด P

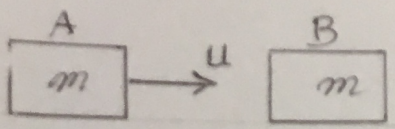
จากหลักอนุรักษ์พลังงานกล $\frac{1}{2}m v_{yP}^2 = \frac{1}{2}m(u\sin 30^\circ)^2 + mg(OP\sin 30^\circ)$

ได้ $v_{yP} = \frac{3}{2}u$, ส่วน $v_{xP} = u\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ เสมอ

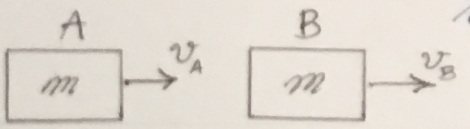
ดังนั้น $\tan\psi = \frac{v_{yP}}{v_{xP}} = \sqrt{3}$, $\psi = 60^\circ$, $\phi = \psi - 30^\circ = 30^\circ$ ตอบ

F. 19. 7. 67

3.



ก่อนชน



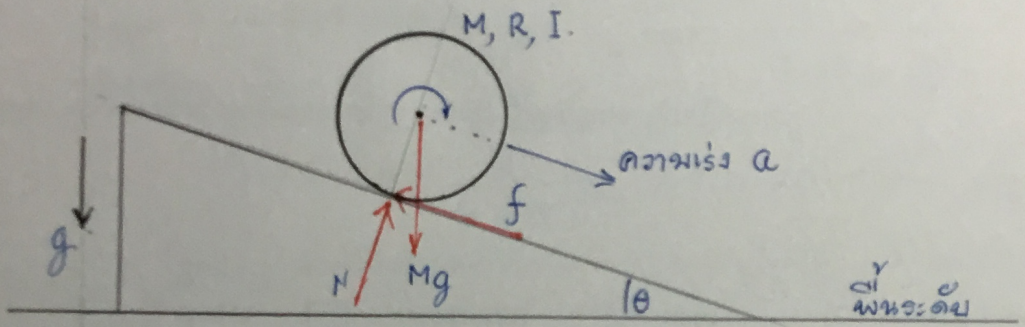
หลังชน

หลักอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น: $mv_A + mv_B = mu$, $v_A + v_B = u$ ——(1)

โจทย์กำหนดว่า $\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}mu^2\right\}$, $v_A^2 + v_B^2 = \frac{1}{2}u^2$ —— (2)

แก้ (1) & (2) ได้ $v_A = +\frac{u}{2}$, $v_B = +\frac{u}{2}$ ตอบ

4.



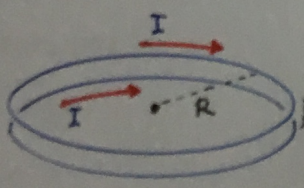
M ทำกลิ้งโดยไม่ไถล ความเร่งเชิงมุมของ M จึงเป็น $\frac{a}{R}$,

$I\frac{a}{R} = fR$ —— (1), f เป็นแรงเสียดทานที่พื้นกระทำต่อ M

$Ma = Mg\sin\theta - f$ —— (2)

แก้ (1) & (2) ได้ $f = \dfrac{Mg\sin\theta}{\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)}$ ตอบ

5.

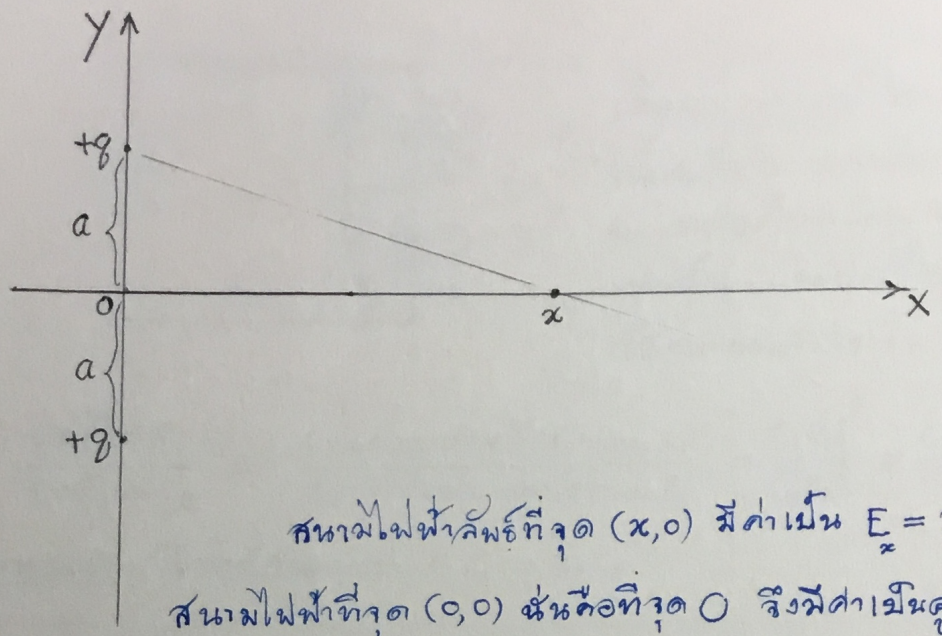


ก. แรงที่ลวดกระทำต่อกันเป็นแรงดูดกัน

ข. แรงดูดมีขนาด $\approx \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\right)(2\pi R)$

$\approx \frac{\mu_0 I^2 R}{d}$ ตอบ.

6.



สนามไฟฟ้าลัพธ์ที่จุด $(x,0)$ มีค่าเป็น $E_x = 2\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$

สนามไฟฟ้าที่จุด $(0,0)$ นั่นคือที่จุด O จึงมีค่าเป็นศูนย์ ตอบ

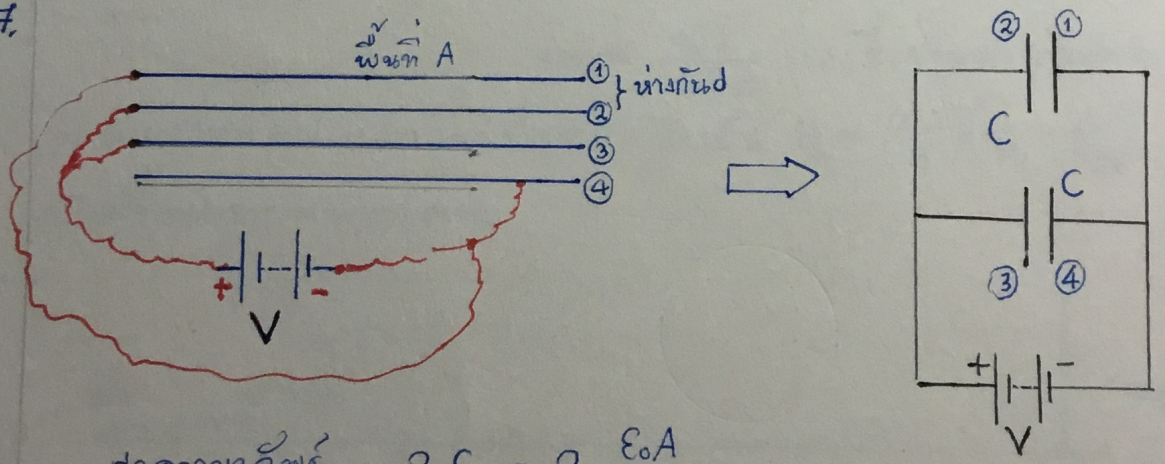
พิจารณา เขียน $E_x = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\dfrac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}$, ซึ่ง $\xi \equiv \dfrac{x}{a}$.

โจทย์บอกว่า $\dfrac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}$ มีค่าโตสุดเท่ากับ $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ ดังนั้น

E_x มีค่าโตสุดที่ตำแหน่ง $x = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}a$ และโตเท่ากับ $\dfrac{q}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}$

ตอบ

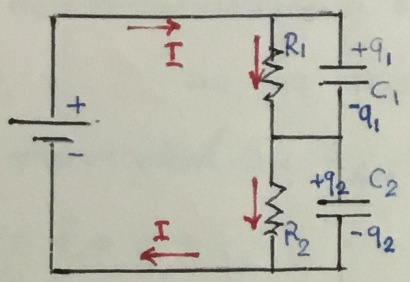
7.



ค่าความจุลัพธ์ $= 2C = 2\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$

ขนาดของประจุไฟฟ้าลัพธ์ $= 2CV = \dfrac{2\varepsilon_0 AV}{d}$

8.

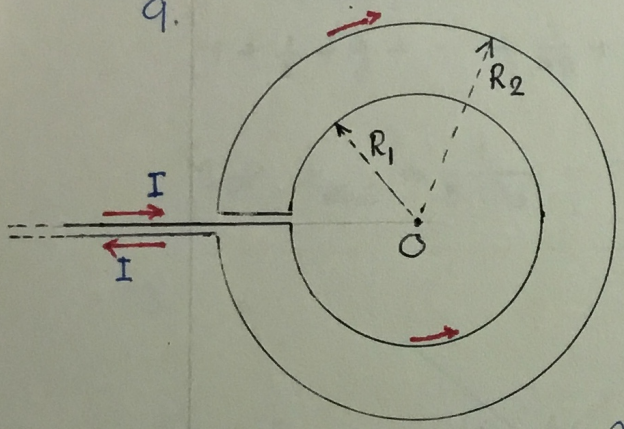


เมื่อกระแสไฟฟ้าในวงจรคงที่ ไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลาแล้ว กระแสจะไหลผ่าน R_1 & R_2 เท่านั้น และประจุใน C_1 & C_2 ก็มีขนาดคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$\frac{\text{ประจุใน } C_1}{\text{ประจุใน } C_2} = \frac{C_1 \times \text{ความต่างศักย์คร่อม } R_1}{C_2 \times \text{ความต่างศักย์คร่อม } R_2} = \frac{C_1 R_1 I}{C_2 R_2 I} = \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} = 1$$ ตอบ

หมายเหตุ โจทย์กำหนดว่า $R_1 C_1 = R_2 C_2$

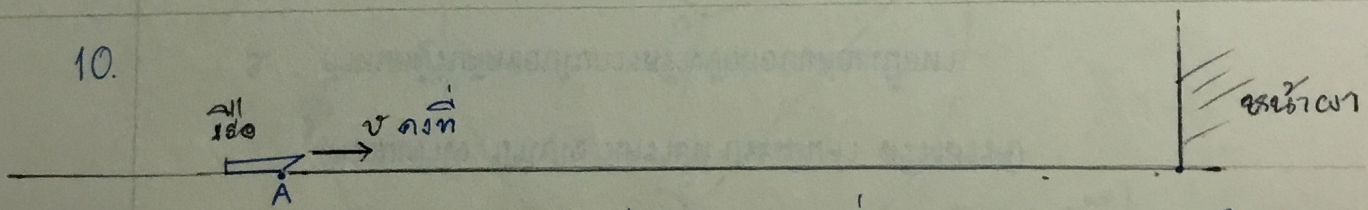
9.



ที่จุด O สนามแม่เหล็ก (B_0) เนื่องจากกระแสวงในมีขนาดเท่ากับ $\frac{\mu_0 I}{2R_1}$ และมีทิศทางชี้ออกจากหน้ากระดาษ ส่วนสนามเนื่องจากกระแสวงนอกมีขนาด $\frac{\mu_0 I}{2R_2}$ และชี้เข้าหน้ากระดาษ

ดังนั้นสนามแม่เหล็กลัพธ์ที่จุด O จึงเป็น $B_0 = \left(\frac{\mu_0 I}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ มีทิศชี้ออกจากหน้ากระดาษ ตอบ

10.



เรือเปิดหวูดสั้นๆที่จุด A จุดซึ่งเราสมมติว่าเรือกำลังอยู่ห่างจากหน้าผาเป็นระยะทาง x.

ที่เวลา t หลังเปิดหวูด คนบนเรือได้ยินเสียงสะท้อน เรือจึงอยู่ห่างจากหน้าผาเท่ากับ $(x - vt)$

ดังนั้น $x + (x - vt) = (\text{อัตราเร็วของเสียงในอากาศ}, c) \times t$

ได้ $x = \frac{1}{2}(c + v)t$

เรือจะชนหน้าผาที่เวลา (นับจากจังหวะที่เปิดหวูด) $= \frac{x}{v} = \left(\frac{c+v}{2v}\right)t$ ตอบ

11. ความต้านทานหนึ่งร้อยตัว มีค่าความต้านทานในหน่วยกิโลโอห์มเป็น

1, 2, 3, ..., 98, 99, 100. นำมาต่อขนานกันหมดจะได้

ความต้านทานสัมพัทธ์เป็น $R_{สัมพัทธ์}$ ซึ่ง

$$\frac{1}{R_{สัมพัทธ์}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}.$$

โจทย์บอกว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 0.577\ldots$ เมื่อ n โตมากๆ

(หมายเหตุ ในคณิตศาสตร์เรามีผลที่เรียกว่า Euler's constant (γ)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \equiv \gamma = 0.57721566\ldots)$$

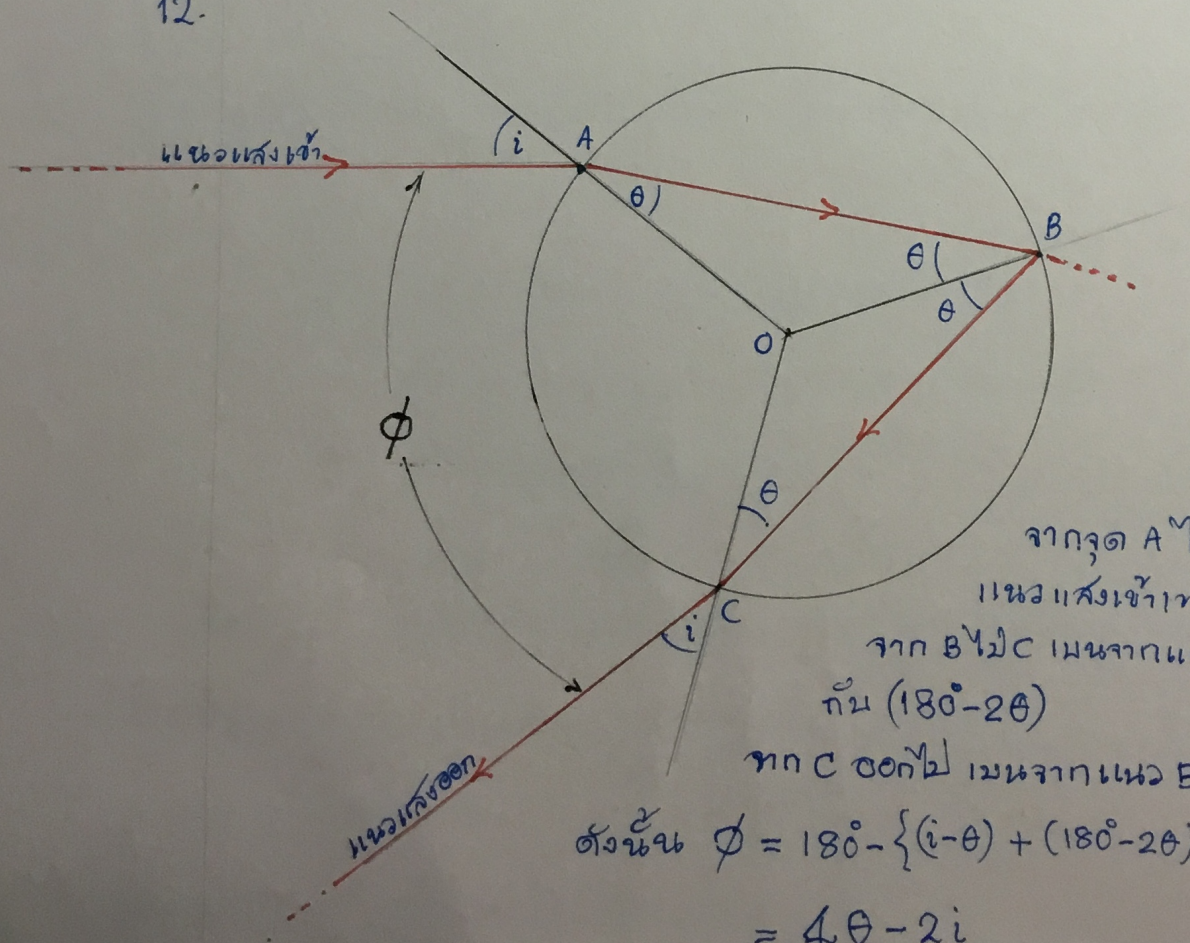
ดังนั้นถ้าเราถือว่า $n = 100$ นั้นโต เราก็จะได้

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \approx 0.577 + \ln 10^2$$

$$\approx 0.577 + 4.606 \approx 5.18_3$$

ดังนั้น $R_{สัมพัทธ์} \approx \frac{1}{5.18_3} \approx 0.193\ k\Omega \approx 193\ \Omega$ ตอบ

12.



จากจุด A ไป B เบนจากแนวแสงเข้าเท่ากับ $(i-\theta)$

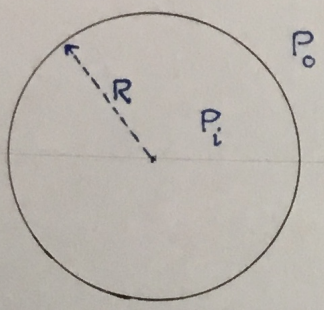
จาก B ไป C เบนจากแนว AB เท่ากับ $(180^\circ - 2\theta)$

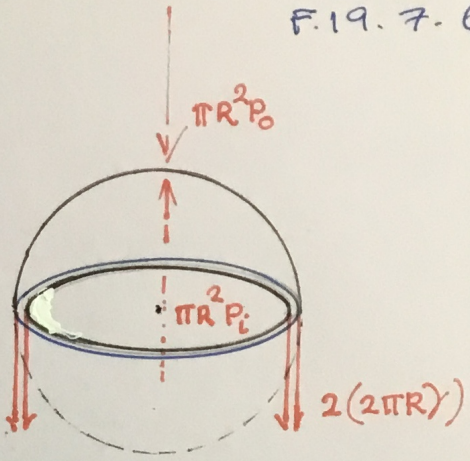
จาก C ออกไป เบนจากแนว BC เท่ากับ $(i-\theta)$

ดังนั้น $\phi = 180^\circ - \{(i-\theta) + (180^\circ - 2\theta) + (i-\theta)\}$

$= 4\theta - 2i$ ตอบ

13.





ฟองสบู่รัศมี R มีผิวที่บางมาก พอที่จะถือได้ว่า ผิวนอกและผิวในมีรัศมี R ความดันอากาศในฟองเป็น P_i ซึ่งฟองสูงกว่าความดันอากาศนอกฟอง P_o เนื่องจากแรงตึงผิวของความตึงผิว และที่สภาวะสมดุลเราได้

$$\pi R^2 P_i = \pi R^2 P_o + \underbrace{(2\pi R\gamma)}_{\text{เนื่องจากผิวนอก}} + \underbrace{(2\pi R\gamma)}_{\text{เนื่องจากผิวใน}}$$

$$P_i - P_o = \frac{4\gamma}{R}$$ ตอบ

14.

$$\frac{1}{f} = (\mu-1)\left\{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right\} \equiv (\mu-1)C \qquad \text{——— (1)}$$

$$\frac{1}{f+\delta f} = (\mu+\delta\mu-1)C = (\mu-1)C + (\delta\mu)C \overset{(1)}{=} \frac{1}{f} + (\delta\mu)C \quad \text{—(2)}$$

$$\frac{1}{f+\delta f} - \frac{1}{f} = (\delta\mu)C \;,\quad -\frac{\delta f}{(f+\delta f)f} = (\delta\mu)\frac{1}{(\mu-1)f}$$

$$\frac{\delta f}{f+\delta f} = -\frac{\delta\mu}{\mu-1} \;,\quad \frac{\delta f}{f} \approx -\frac{\delta\mu}{\mu-1}$$ ตอบ

หมายเหตุ 1 การใช้ calculus จะทำได้เช่นกัน:

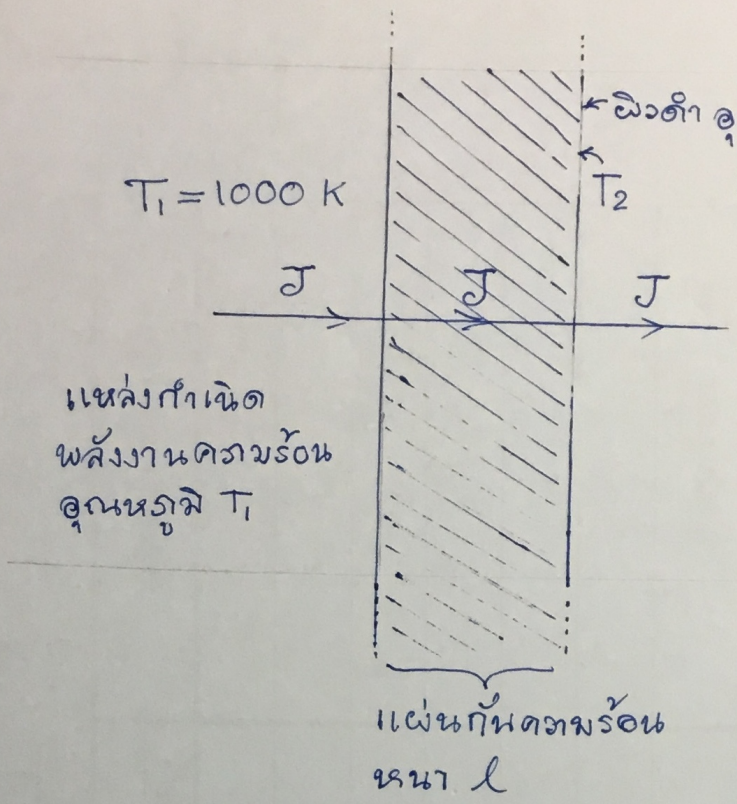
$$(1)\rightarrow \quad -\ln f = \ln(\mu-1) + \ln C$$

แล้วทำ $\frac{d}{d\mu}$, จะได้ $-\frac{1}{f}\frac{d}{d\mu}f = \frac{1}{\mu-1}$

$$-\frac{1}{f}\left(\frac{d}{d\mu}f\right)\delta\mu \approx \frac{1}{\mu-1}\delta\mu \;,\quad \frac{\delta f}{f} \approx -\frac{\delta\mu}{\mu-1}.$$

F 19. 7. 67

15. 7/8



แผ่นกั้นความร้อน มี thermal conductivity เป็น K นำความร้อนจากแหล่งกำเนิด T_1 ไปที่ที่ T_2 ด้วยอัตรา $J = K\frac{T_1 - T_2}{\ell}$

ผิวด้านขวาของแผ่นกั้นความร้อนมีอุณหภูมิ T_2 และแผ่รังสีความร้อนทั้งไปทางขวาด้วยอัตรา $J = \sigma T_2^4$

ต่อหน่วยพื้นที่

ที่สภาวะคงตัว (steady state) เราได้

$$\sigma T_2^4 = K\frac{T_1 - T_2}{\ell}$$

$$\left(\frac{\sigma\ell}{K}\right)T_2^4 + T_2 = T_1 \quad , \quad \left(\frac{\sigma\ell}{K}\right)(T_1)^3\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{T_1}\right) - 1 = 0,$$

โจทย์กำหนดให้ $K = 0.57\ \frac{W}{m\cdot K}$, $\sigma = 5.7\times10^{-8}\ \frac{W}{m^2\cdot K^4}$, และ $\ell = 0.1$ m. ได้ $\frac{\sigma\ell}{K} = \frac{5.7\times10^{-8}\times0.1}{0.57} = 10\times10^{-9}\ (\text{kelvin})^{-3}$

แล้วใช้ $T_1 = 1000$ kelvin เราได้

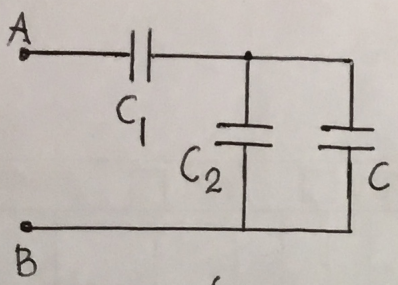
$$(10\times10^{-9})(10^9)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 1 \quad , \quad 10\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 1.$$

โจทย์บอกว่าสมการนี้มีรากเป็น $\frac{T_2}{T_1} = 0.478$

ดังนั้น $T_2 = 478$ kelvin ตอบ

หมายเหตุ σ เป็น Stefan-Boltzmann constant.

16. (ก)



$$C_{AB} = \left\{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C}\right\}^{-1} = \frac{C_1C_2 + C_1C}{C_1 + C_2 + C}$$

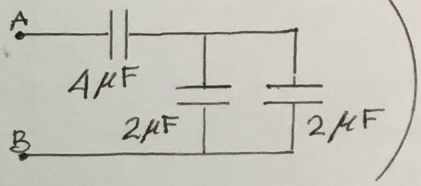
โจทย์ต้องการให้ C_{AB} มีค่าเท่ากับ C

นั่นคือโจทย์ต้องการให้ $\frac{C_1C_2 + C_1C}{C_1 + C_2 + C} = C$,

$C^2 + C_2C - C_1C_2 = 0$, $C = +\sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 + C_1C_2} - \frac{C_2}{2}$. ตอบ

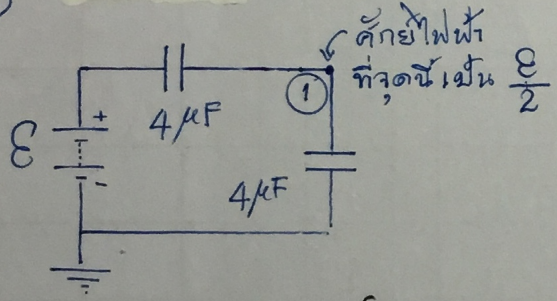
(ค่า C นี้จะทำให้ $C_{AB} = C$ ตัวอย่างเช่น

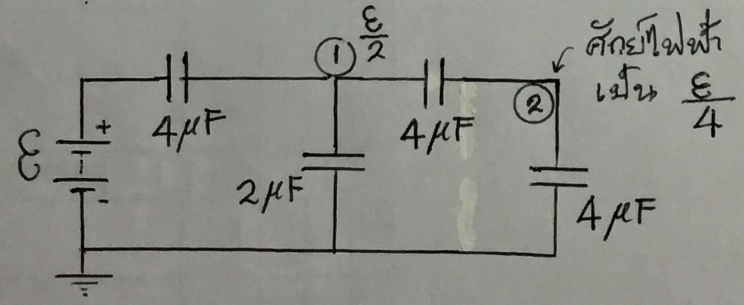
$C_{AB} = 2\mu F$

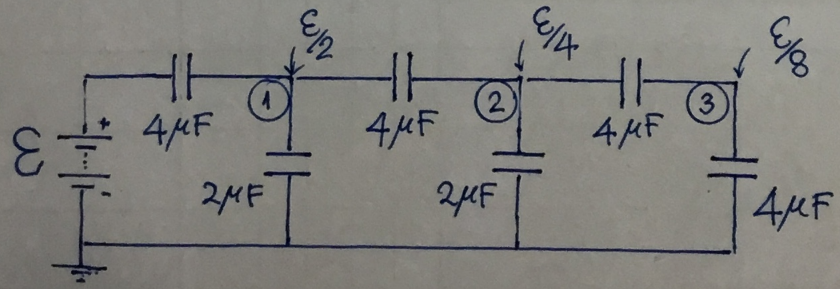


)

(ข)







ศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง (5) จึงมีค่าเท่ากับ $\frac{\varepsilon}{32}$ ตอบ.