ม.5

กระดาษคำตอบ ระดับชั้น ม.5

ชื่อ - นามสกุล เลขที่นั่งสอบ

โรงเรียนต้นสังกัด ตรวจข้อละ 2 คะแนน

อาทิตย์ 31 สิงหาคม พ.ศ. 2557 เวลา 900-1200 น.

---

1. คาบของการสั่น $= 2\pi\left(\frac{N}{N+n}\,\frac{M}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. แอมพลิจูดเชิงมุม $= \arccos\left\{1-\frac{2}{gl}\left(\frac{mu}{M+m}\right)^2\right\}$

3. รถไฟอยู่ห่าง B $= \left(\frac{2u}{v+u}\right)D$

4. ความต่างศักย์ $= \frac{1}{2}\,\frac{r}{R+r}\left(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2\right)$

5 อัตราที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น $3^4 = 81$ เท่า.

6. แรง $= \dfrac{2gh\rho a}{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$

7. พลังงานรวม $= -\frac{7}{4}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

8. ก) ศักย์ $= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$ ข) ความต่างศักย์ $= \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

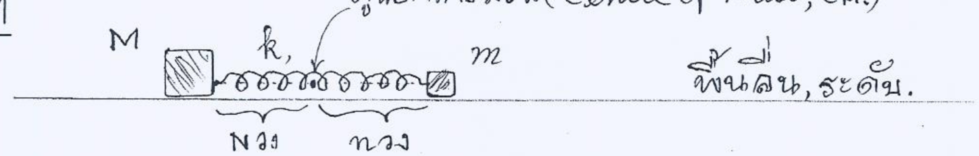
9. กำลังขยาย $= 1+\frac{17}{f}$

10. คาบของการสั่น $= 2\pi\left(\frac{Ml}{2mg\sin^2\theta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$

ชั้น ม.5

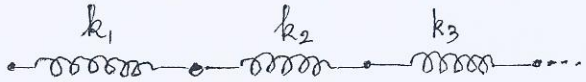
(อาทิตย์ 31 ส.ค. '57 9-12 น.)

ข้อ.1



จุด CM อยู่นิ่งใน INERTIAL FRAME ที่ใช้บรรยายการเคลื่อนที่.

ระลึกถึงสูตรของการรวมสปริงแบบต่อกันแบบอันดับ



$$\frac{1}{k_{รวม}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots$$

ซึ่งถ้าแต่ละสปริงมีค่า k_i เท่ากันและมีจำนวน I ตัว จะได้ $\frac{1}{k_{รวม}} = \frac{I}{k_i}$

$$\therefore \quad k_{รวม} = \frac{k_i}{I} \quad , \quad k = \frac{k_{1วง}}{N+n}.$$

นี่บ่งว่าสปริงจากตำแหน่ง M ถึง CM มีค่าคงที่ k_{M-CM} เป็น

$$\frac{1}{k_{M-CM}} = \frac{N}{k_{1วง}} \quad , \quad k_{M-CM} = \frac{N+n}{N}k.$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าคงที่ของสปริงช่วง CM ถึง m มีค่าเป็น k_{CM-m}

$$k_{CM-m} = \frac{N+n}{n}k.$$

M สั่นด้วยคาบ $T_M = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_{M-CM}}} = 2\pi\left(\frac{N}{N+n}\frac{M}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$ ตอบ

m สั่นด้วยคาบ $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{CM-m}}} = 2\pi\left(\frac{n}{N+n}\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$

ข้อสังเกต i) จุด CM ไม่มีความเร่ง เราเลือกใช้ระบบอ้างอิงที่ CM อยู่นิ่ง พวก M และ m จึงเสมือนสั่นอิสระที่ปลายสปริงของตัวเอง

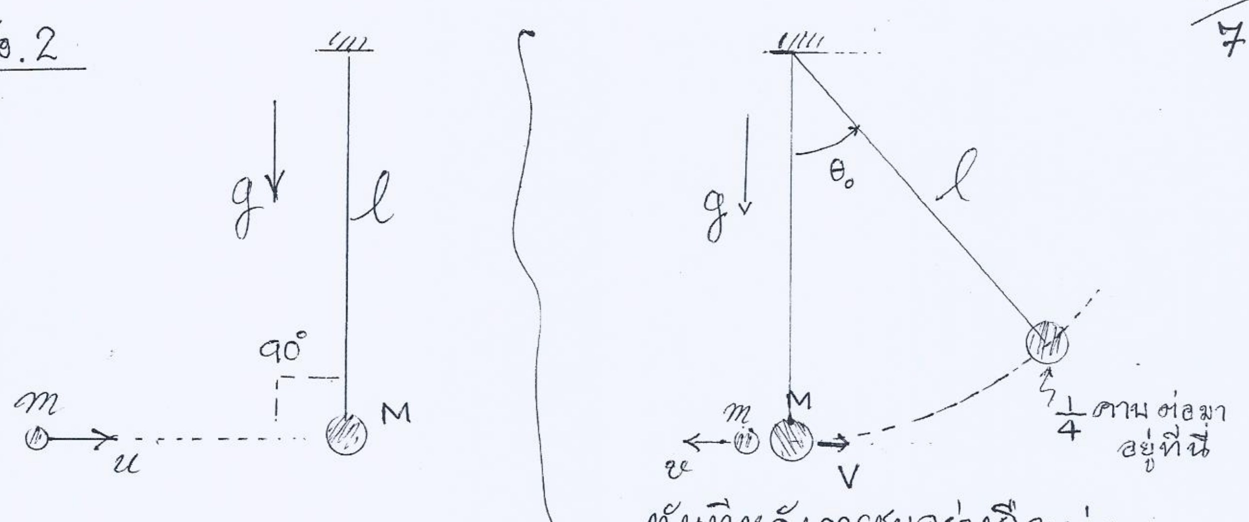
ii) T_M กับ T_m ต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้น $NM = nm$

ดังนั้นคาบของการสั่นของระบบคือ $T = T_M = T_m = 2\pi\sqrt{\left(\frac{Mm}{M+m}\right)\frac{1}{k}}$

นี่เป็นสูตรของคาบที่พบในตำราทั่วไป เช่น หนังสือ สอวน.

ปริมาณ $\mu \equiv \frac{Mm}{M+m}$ เรียกว่า REDUCED MASS ของระบบ.

ข้อ 2



ทันทีหลังการชนอย่างยืดหยุ่น

ความเร็วของ m และ M ทันทีหลังชนอย่างยืดหยุ่นหาได้จาก:

i) หลักอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น $MV - mv = mu$ ——(1)

ii) หลักอนุรักษ์พลังงานกล $\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2$ ——(2)

แก้สมการ (1) & (2) จะได้ $V = \frac{2m}{M+m}u$, $v = \frac{M-m}{M+m}u$ ——(3)

จากนั้น M จะเหวี่ยงออกไปและได้การกระจัดเชิงมุมไกลสุด θ_0 ซึ่งจะเป็น AMPLITUDE เชิงมุมของการแกว่ง ค่า θ_0 หาได้จากหลักอนุรักษ์พลังงานกล:

$$Mg(l - l\cos\theta_0) = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{2mu}{M+m}\right)^2$$

$$\therefore \quad \theta_0 = \arccos\left\{1 - \frac{2}{gl}\left(\frac{mu}{M+m}\right)^2\right\}$$

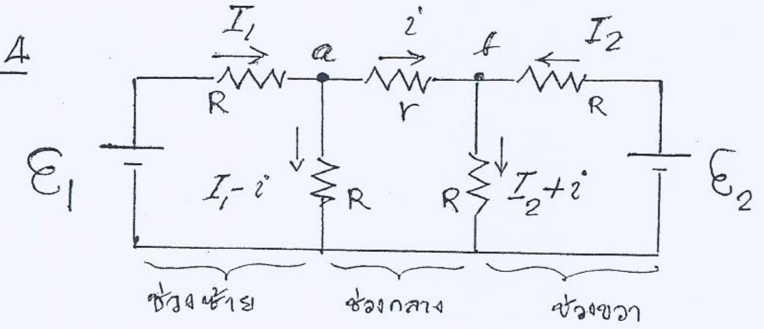
ข้อ 3

$AB = D$

สมมติให้นกกับรถไฟประจันหน้ากันครั้งแรกที่เวลา t หลังเริ่ม

$\therefore$ $vt + ut = D$, $t = \frac{D}{v+u}$. ซึ่งที่จังหวะนี้รถไฟห่าง B เท่ากับ $ut = \frac{uD}{v+u}$, และนกห่าง A เท่ากับ $vt = \frac{vD}{v+u}$. นกบินกลับจากจุดนี้ไปถึง A ใช้เวลาอีก $t_1 = \frac{vt}{v} = \frac{D}{v+u}$ ซึ่งในเวลา t_1 นี้รถไฟเคลื่อนที่ได้ระยะทางอีก $ut_1 = \frac{uD}{v+u}$ ดังนั้นรถไฟเคลื่อนที่ได้ (เมื่อนกกลับถึง A) รวม $= ut + ut_1 = \frac{2u}{v+u}D$ (ซึ่ง $< D$).

ข้อ 4



แล้วใช้กฎ Kirchhoff's rules:

สำหรับช่องซ้าย: $RI_1 + R(I_1 - i) = \mathcal{E}_1$ ——— (1)

,, ,, กลาง: $ri + R(I_2 + i) = R(I_1 - i)$ ——— (2)

,, ,, ขวา: $RI_2 + R(I_2 + i) = \mathcal{E}_2$ ——— (3)

จากนั้นแก้สมการ (1), (2), & (3) เพื่อหาค่า i, (และ I_1, I_2 ถ้าต้องการ):

(1) + (3) ได้ $2R(I_1 + I_2) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2R}$ ——— (4)

(1) − (3) ,, $2R(I_1 - I_2) - 2Ri = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ ——— (5)

(2) → $(2R + r)\,i = R(I_1 - I_2)$ ——— (6) เอาแทนลงใน (5)

ได้ $(4R + 2r - 2R)\,i = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{2(R + r)}$ ——— (7)

$V_{ab}\,(\equiv V_a - V_b)$ เท่ากับ $ri = \frac{1}{2}\frac{r}{R+r}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$ <u>ตอบ</u>

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าต้องการค่าของ I_1 และ I_2 ก็ทำต่อ:

(6) → $I_1 - I_2 = \left(\frac{2R + r}{2R + 2r}\right)\left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R}\right)$ ——— (8)

(4) → $I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2R}$ ——— (4)

แก้ (4) กับ (8) ได้ $I_1 = \left\{\frac{\mathcal{E}_1}{2R} + \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{4(R + r)}\right\}$ ซึ่งเป็นบวกเสมอ,

และ $I_2 = \left\{\frac{\mathcal{E}_2}{2R} - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{4(R + r)}\right\}$ ซึ่งสามารถเป็นศูนย์ได้ เมื่อ $\mathcal{E}_2 = \frac{R\mathcal{E}_1}{3R + 2r}$.

<u>การตรวจสอบคำตอบ</u> ว่าผิดหรือไม่ ซึ่งไม่จำเป็นต้องหมายความว่าถูก

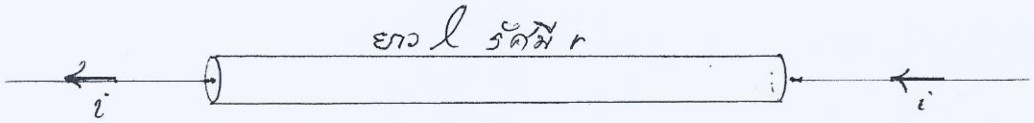
ก) <u>ตรวจ V_{ab}</u>. $\lim_{r \to \infty} V_{ab} = \lim_{r \to \infty}\left\{\frac{1}{2}\frac{r}{R+r}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\right\} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$ ดูรูปก็รู้ว่าใช่.

ข) <u>ตรวจ I_1</u> $\lim_{r \to \infty} I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{2R}$ ซึ่งดูรูปก็รู้ว่าจริง

ค) <u>ตรวจ I_2</u> $\lim_{r \to \infty} I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{2R}$, เช่นกัน.

แต่บางครั้งคำตอบที่ผิดก็อาจ ตรวจแบบนี้ไม่เจอ ebola!

ข้อ 5



เนื้อลวดมี resistivity ρ
density D
specific heat (capacity) s

ถ้าพลังงานความร้อนที่เกิดจากพลังงานไฟฟ้าไม่รั่วหนีเลยจากลวด อุณหภูมิของลวดจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{d}{dt}T$ ซึ่งหาจาก

$$(\pi r^2 l D)\, s \frac{d}{dt}T = i^2(\text{Resistance}) = i^2\left(\frac{\rho l}{\pi r^2}\right)$$

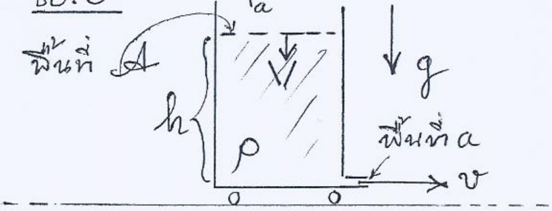
$\frac{d}{dt}T = \frac{\rho i^2}{D s \pi^2 r^4}$ นั่นคือ $\frac{d}{dt}T \propto \frac{1}{r^4}$ เมื่อปริมาณอื่นคงที่.

$$\left(\frac{d}{dt}T\right)_{\text{ลวดเส้นนี้}} = \frac{\text{ค่าคงที่, C}}{r^4}$$

$$\left(\frac{d}{dt}T\right)_{\text{ลวดที่โต 3 เท่า}} = \frac{\text{ค่า C เดียวกัน}}{(3r)^4} = \frac{1}{81}\left(\frac{d}{dt}T\right)_{\text{เส้นเดิม}}$$

$\left(\frac{d}{dt}T\right)_{\text{เส้นเล็ก}} \Big/ \left(\frac{d}{dt}T\right)_{\text{เส้นโต 3 เท่า}} = 81$ เท่า ตอบ

ข้อ 6



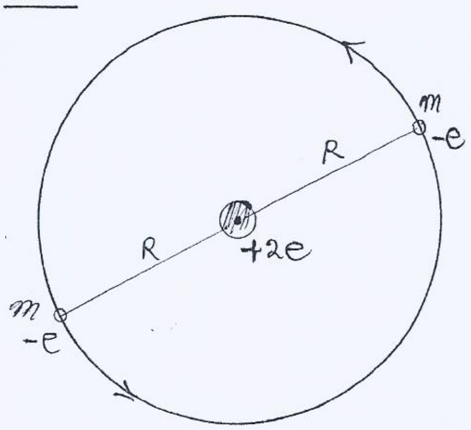
สมมติว่าน้ำไหลออกเร็ว v, ถังถูกจับนิ่ง. ความหนาแน่นของน้ำคงที่ (ถูกอัดเล็กลงไม่ได้) บ่งว่า $av = AV$, V เป็นอัตราเร็วที่ระดับน้ำลดลง

ใช้สมการ Bernoulli's equation: $\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g h$

แก้สองสมการนี้ได้ $v^2 = \frac{2gh}{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$.

แรงดันถังไปทางซ้ายมีขนาด (f) เท่ากับแรงที่ขับน้ำออกไปจากก้นถัง ซึ่งเท่ากับอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของน้ำ ซึ่งเราจะประมาณว่าถังนั้นอยู่นิ่งๆ (จริงทีเดียวถ้า $a \ll A$). $f = (\rho v a)v = \frac{2gh\rho a}{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$.

ข้อ.7



m เคลื่อนที่ตามแนววงกลม รัศมี R อัตราเร็ว v ถ้า

$\frac{mv^2}{R}$ = แรงรั้งเข้าหาศูนย์กลาง

ซึ่งมีสองแรงคือแรงดูด $\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

กับแรงผลัก มีขนาด $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (2R)^2}$

ดังนั้น $\frac{mv^2}{R} = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (4R^2)} = \frac{7}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

∴ พลังงานจลน์ของระบบคือ $2\times\frac{1}{2}mv^2 = mv^2 = \frac{7}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

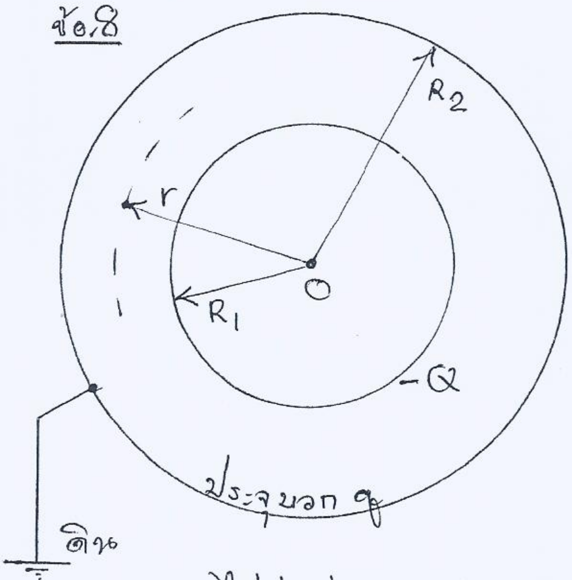
พลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบคือ $2\times\frac{-2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{(-e)(-e)}{4\pi\varepsilon_0 (2R)} =$

$$= -\frac{7}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ดังนั้นพลังงานรวมของระบบคือ E = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

$$E = \frac{7}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{7}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{7}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$ ตอบ

ข้อ.8



เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกทรงกลม R_2 ต้องเป็นศูนย์เพราะ grounded.

ใช้ Gauss's law จะได้ $q = |-Q| = Q$

ศักย์ไฟฟ้าที่จุด r คือ V_r , $R_1 \le r \le R_2$.

$$V_r = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q=Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$ เป็นลบเสมอ ถ้า $Q > 0$

ตอบ

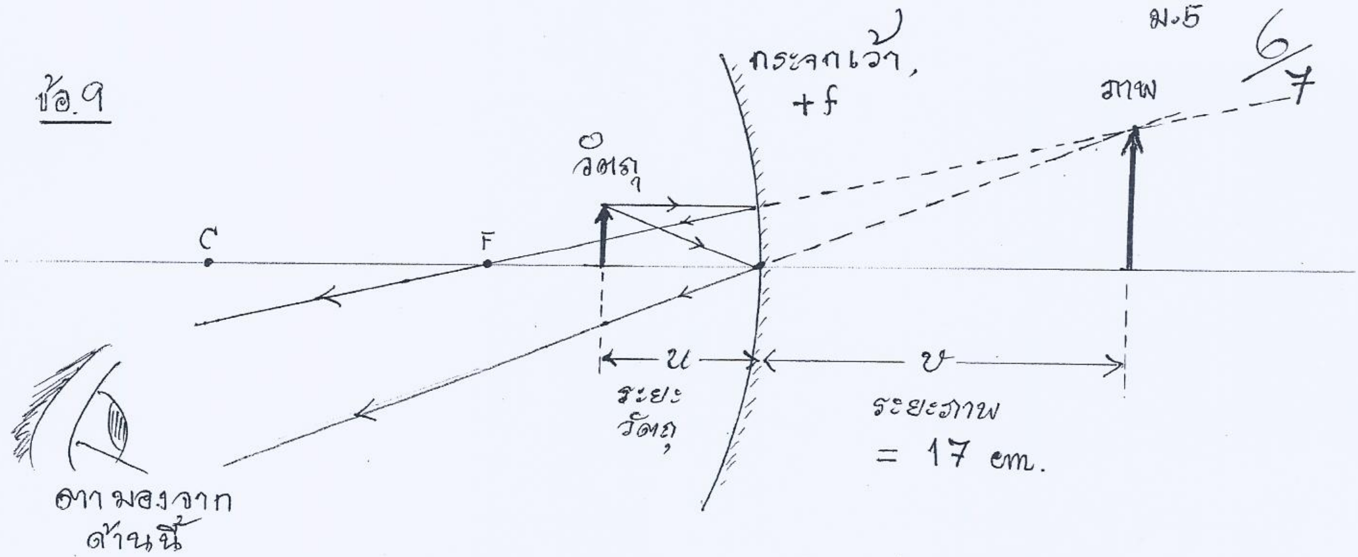
ศักย์ไฟฟ้าที่ผิวนอกคือ $V_2 = 0$

" " ใน " $V_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

∴ ความต่างศักย์ระหว่างผิวนอกกับในคือ $V_{21} \equiv V_2 - V_1 = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

ตอบ

ข้อ.9



$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f} \quad , \quad v = \frac{uf}{u-f} = -\frac{uf}{f-u}$$

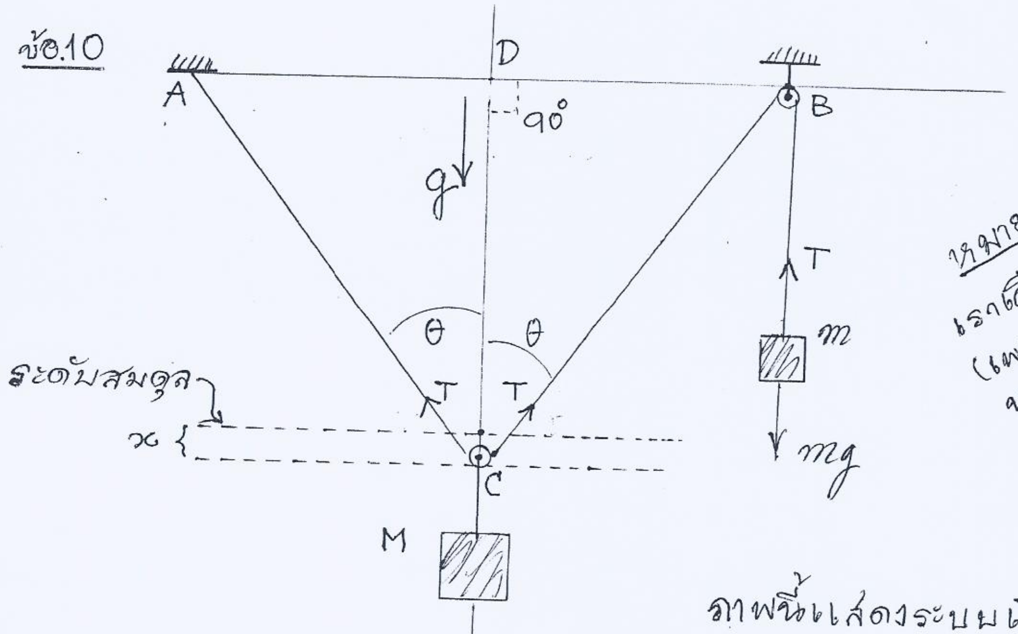
จัดระยะ u ให้ได้ภาพเป็นภาพเสมือน (ดังนั้น v = ค่าลบ) อยู่หลังกระจกเว้า 17 cm , นั่นคือ $17 = \frac{uf}{f-u}$,

แก้สมการนี้เพื่อหาว่าจะต้องวางวัตถุไว้ที่ระยะ $u = \frac{17f}{f+17}$

กำลังขยายสำหรับการจัดแบบนี้คือ $M = \frac{|v|}{u} = \frac{17}{u} = 1 + \frac{17}{f}$

ตอบ

ข้อ.10



หมายเหตุ โจทย์ข้อนี้เราเลือกที่จะกำหนด θ_0 และ l (เพราะชอบ!) แทนที่จะกำหนดระยะทาง AB.

ภาพนี้แสดงระบบเมื่อถูกโยกออกไปจากตำแหน่งสมดุลโดย M ถูกดึงลงมาที่ตำแหน่งห่างจากตำแหน่งสมดุลเป็นระยะทาง x ลงล่าง.

ที่ตำแหน่งสมดุลนั้น $\theta = \theta_0$, $DC_0 = l\cos\theta_0$, $T_0 = mg$,

และ $Mg = 2T_0\cos\theta_0$ สมดุล

$$\therefore \; Mg = 2mg\cos\theta_0 \quad \text{—— (0)}$$

ต่อ (ข้อ.10) (จะเฉลยคนละแบบกับของข้อคล้ายกันของ ม. 4)

Equations of motion ของระบบได้แก่ $M\frac{d^2}{dt^2}x = Mg - 2T\cos\theta$ —— (1)

และ $ma = T - mg$, a เป็นความเร่งของ m ในทิศขึ้น, —— (2)

และอีกสมการคือที่เชื่อมโยง a กับ $\frac{d^2}{dt^2}x$, ซึ่งเราจะไม่ทำให้ดู, —— (3)

"ไม่ทำ" เพราะไม่จำเป็น ถ้าเราสมมติว่า $x \ll l$ จะได้ประมาณได้ง่าย.
ทำให้ $a \ll g$ ดังนั้น (2) ให้ผลว่า $T \approx mg$ แล้วแทนใน (1) จะได้

$$M\frac{d^2}{dt^2}x \approx Mg - 2mg\cos\theta \qquad (4)$$

ต่อไป หาค่าโดยประมาณของ $\cos\theta = \frac{l\cos\theta_0 + x}{BC}$ —— (5)

หมายเหตุ ถ้าอยากไปแข่งเอาเหรียญทองใน IPhO ก็ต้องทำแบบนี้ได้!

ต่อไป หา $(BC)^2 = (l\cos\theta_0 + x)^2 + (DB)^2$ โดย Pythagoras's theorem.

$$= \underbrace{\{(l\cos\theta_0)^2 + (DB)^2\}}_{\text{นี่คือ } l^2} + (2l\cos\theta_0)x + x^2$$ ← เล็กมากๆ เทียบอันอื่น

$$(BC)^2 \overset{\text{ประมาณ}}{\approx} l^2 + 2l\cos\theta_0\, x \approx l^2\left(1 + \frac{2\cos\theta_0\, x}{l}\right), \quad BC \approx l + \cos\theta_0\, x \qquad (6)$$

โดย BINOMIAL EXPANSION.

แล้วหา $\cos\theta = \frac{DC}{BC} \approx \frac{l\cos\theta_0 + x}{l + \cos\theta_0\, x} \approx (\cos\theta_0)\left(1 + \frac{x}{l\cos\theta_0}\right)\left(1 - \frac{\cos\theta_0\, x}{l}\right)$

$$\approx (\cos\theta_0)\left(1 + \frac{x}{l\cos\theta_0} - \frac{x\cos\theta_0}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) \approx (\cos\theta_0)\left(1 + \frac{x\sin^2\theta_0}{l\cos\theta_0}\right)$$

เล็กมาก ตัดทิ้ง —— (7)

(7) และ (4) ได้ $M\frac{d^2}{dt^2}x \approx Mg - 2mg\cos\theta_0 - \frac{2mg\sin^2\theta_0}{l}x$

แล้วใช้ (0) ท้ายหน้า 6 จะได้ $M\frac{d^2}{dt^2}x \approx -\frac{2mg\sin^2\theta_0}{l}x$ —— (8)

นี่คือสมการซึ่งบรรยาย SIMPLE HARMONIC MOTION ของ M ในแนวดิ่ง

คาบ $\mathcal{T}$ ของการสั่นขึ้นลงของ M คือ $\mathcal{T} = 2\pi\left(\frac{Ml}{2mg\sin^2\theta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ ตอบ

สังเกตด้วยว่า สามารถเขียน $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{AB}{2g}}\cdot\left\{\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^3}\right\}^{\frac{1}{4}}$ ซึ่ง $\beta \equiv \frac{M}{2m} \leq 1$.

รู้หรือไม่ว่าทำไมจึงกำหนดว่า $\beta \leq 1$?

ข้อสังเกต เฉลยแบบของ ม.4 น่าจะสบายกว่า.

Th 4 Sept '57